

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO	i
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABLAS	xiv
Prefacio	xvii
Capítulo 1 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA	1
1.1 OBJETIVOS	1
PARTE I SISTEMAS MONOFÁSICOS	3
1.2 CIRCUITO EQUIVALENTE DE LOS PRINCIPALES COMPONENTES	3
1.3 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE PLACA	6
1.3.1 EJEMPLO 1.1	7
1.4 DEFINICIÓN DE VALORES POR UNIDAD	8
1.5 JUSTIFICACIÓN Y VENTAJAS DE LOS VALORES EN TANTO POR UNO	9
1.5.1 EJEMPLO 1.2	11
1.6 CAMBIO DE BASE	13
PARTE II SISTEMAS TRIFÁSICOS	15
1.7 DIAGRAMA UNIFILAR	15
1.8 SELECCIÓN DE BASES	16
1.9 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE PLACA	17
1.9.1 EJEMPLO 1.3	18

BIBLIOGRAFÍA	22
Apéndice A Independencia entre la Conexión del Transfo Trifásico ...	23
A.1 OBJETIVO	23
A.2 NOTACIÓN	23
A.3 DEMOSTRACIÓN	24
Apéndice B ACOPLE ENTRE SISTEMAS DE DIFERENTE VOLTAJE NOMINAL	27
B.1 OBJETIVO	27
B.2 INTRODUCCIÓN	27
B.3 DERIVACIÓN	27
Apéndice C TRANSFORMADORES DE TRES DEVANADOS POR FASE	31
C.1 SENTIDO DENTRO DEL CONJUNTO	31
C.2 OBJETIVOS	32
C.3 SUPOSICIONES	32
C.4 ENSAYOS	34
C.5 EJEMPLO 1	39
TRANSFORMADORES TRIFASICOS	41
BIBLIOGRAFÍA	45
Capítulo 2 CONSIDERACIONES OPERACIONALES	47
2.1 OBJETIVOS	47
2.2 EL CONCEPTO DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA	47
2.2.1 TRANSMISIÓN MONOFÁSICA	47
2.2.2 EJERCICIO	50
2.2.3 TRANSMISIÓN TRIFÁSICA	50
2.2.4 EL CONCEPTO DE POTENCIA COMPLEJA	52

2.3	OBJETIVOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA	53
2.4	ESTRUCTURA	53
2.4.1	SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN	54
2.4.2	SISTEMA DE SUBTRANSMISIÓN	54
2.4.3	SISTEMA DE TRANSMISIÓN	54
2.5	CARACTERÍSTICAS DE LAS CARGAS	55
2.5.1	DEPENDENCIA DEL VOLTAJE Y LA FRECUENCIA	55
2.6	BALANCE DE POTENCIA REAL Y SU EFECTO EN LA FREC...	57
2.6.1	FUNDAMENTOS BÁSICOS DE FUNCIONAMIENTO DEL GENERADOR SÍNCRONO.	59
2.6.2	PERTURBACIONES BALANCEADAS EN EL SISTEMA	60
2.7	EFECTO DE LA POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA EN EL VOLTAJE	61
2.7.1	RESUMEN	61
2.7.2	INTRODUCCIÓN	61
2.7.3	NOTACIÓN	61
2.7.4	EXPRESIONES BÁSICAS	62
2.7.5	CONCLUSIONES	66
2.8	ESTABILIDAD	68
2.9	CUESTIONES DE SEGURIDAD, COSTO Y CONFIABILIDAD	69
BIBLIOGRAFÍA		70
Capítulo 3 ANÁLISIS EN CONDICIONES DE EQUILIBRIO Y SIMETRÍA		71
3.1	OBJETIVOS	71
3.2	FORMULACIÓN CIRCUITAL	71
3.3	INTERPRETACIÓN CIRCUITAL DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ...	76
3.4	CONDICIONES BALANCEADAS: ECUACIÓN GENERAL NO	

LINEAL	77
3.4.1 ALGORITMO 3.1 PARA CONSTRUIR LA MATRIZ ADMITANCIA DE NODOS	77
3.5 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA	79
3.5.1 CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DEL SISTEMA	79
3.5.2 DILEMA BÁSICO	80
3.5.3 LÍMITES PRÁCTICOS DE LAS VARIABLES DE ESTADO	81
3.5.4 LÍMITES PRÁCTICOS DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES O DE CONTROL	81
3.5.5 ETAPAS DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA	82
3.6 ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA	82
3.7 MÉTODO DE GAUSS	83
3.7.1 UNA ECUACIÓN NO LINEAL CON UNA INCÓGNITA $f(x) = 0$	83
3.7.2 CONJUNTO DE ECUACIONES NO LINEALES $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$	84
3.8 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL	86
3.8.1 DESCRIPCIÓN	86
3.8.2 APLICACIÓN DEL FACTOR DE ACELERACIÓN	87
3.8.3 ALGORITMO 3.2: MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL	88
3.9 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON	91
3.9.1 EXPANSIÓN DE UNA FUNCIÓN $f(x)$ EN UNA SERIE DE POTENCIAS	92
3.9.2 ALGORITMO 3.3	94
3.9.3 EXPANSIÓN DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES EN UNA SERIE DE TAYLOR	96
3.9.4 ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON PARA RESOLVER $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$	99
3.10 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA	103
3.10.1 CODIFICACIÓN DE BARRAS	103

3.10.2 DATOS	103
3.10.3 INCÓGNITAS	103
3.11 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL: ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA	104
3.11.1 ALGORITMO 3.4	105
3.11.2 MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO ANTERIOR CUANDO HAY BARRAS DE VOLTAJE CONTROLADO	106
3.11.3 EJEMPLO 3.7	106
3.12 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON	112
3.12.1 FORMULACIÓN PARA ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA	112
3.12.2 EXPRESIONES GENERALES PARA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA	116
3.12.3 CONSIDERACIONES COMPUTACIONALES	120
3.12.4 ALGORITMO 3.5	122
3.12.5 EJEMPLO 3.8	123
3.12.6 CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LAS SUBMATRICES DE LA JACOBIANA	124
3.13 CRITERIO DE ACEPTACIÓN	126
3.13.1 EJEMPLO 3.9	127
3.14 REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMADORES	128
BIBLIOGRAFÍA	132
Capítulo 4 ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO	133
4.1 OBJETIVO	133
4.2 NOTACIÓN	134
4.3 ANÁLISIS DE SISTEMAS TRIFÁSICOS	135
4.3.1 EJEMPLO 1	138
4.4 CLASIFICACIÓN DE FALLOS TIPO PARALELO	139

4.5	FALLOS EN SISTEMAS TRIFÁSICOS EN FUNCIÓN DE CANTIDADES DE FASE	141
4.5.1	PROCEDIMIENTO GENERAL	141
4.5.2	EQUIVALENTE DE THÉVENIN DEL CIRCUITO DE PREFALLO	143
4.5.3	EJEMPLO 2	144
4.6	MÉTODO DE LAS TRES COMPONENTES	147
4.7	TRANSFORMACIÓN DE SIMILARIDAD	151
4.7.1	EJEMPLO 3	152
4.7.2	EJEMPLO 4	154
4.7.3	EJERCICIOS	157
4.8	APROXIMACIONES EN ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO	157
4.9	COMPONENTES SIMÉTRICAS	160
4.10	FALLOS PARALELO POR EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES...	165
4.11	INTERCONEXIÓN DE LAS REDES DE SECUENCIA...	168
4.11.1	FALLO LÍNEA-TIERRA (L-G)	168
4.11.2	FALLO DOBLE LÍNEA TIERRA (L-L-G)	169
4.11.3	FALLO SIMULTÁNEO LÍNEA-TIERRA (Fase <i>a</i>) Y LÍNEA-LÍNEA (Fases <i>b</i> y <i>c</i>)	172
4.11.4	FALLO TRIFÁSICO SIMÉTRICO A TIERRA (L-L-L-G)	174
4.12	CORTO-CIRCUITO POR COMPONENTES SIMÉTRICAS: EJEMPLO	177
4.13	POTENCIA DE CORTO CIRCUITO	181
	BIBLIOGRAFÍA	185
	Apéndice D EL TRANSFO TRIFÁSICO EN ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO	187
D.1	OBJETIVO	187
D.2	CONEXIONES INTERNAS	187

D.3 CIRCUITO EQUIVALENTE EN SECUENCIA POSITIVA Y NEGATIVA	191
D.4 EJEMPLO	192
D.5 EL TRANSFO TRIFÁSICO EN LA RED DE SECUENCIA CERO	195
BIBLIOGRAFÍA	199
Capítulo 5 ALGORITMO PARA CONSTRUIR LA MATRIZ IMPEDANCIA DE NODOS	201
5.1 OBJETIVO	201
5.2 NOTACIÓN	201
5.3 NOMENCLATURA Y DEFINICIONES	202
5.4 INTERPRETACIÓN CIRCUITAL DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ ...	203
5.5 ADICIÓN DE UN ELEMENTO RADIAL	206
5.5.1 EJEMPLO 1	209
5.6 ADICIÓN DE UN ENLACE	211
5.6.1 EJEMPLO 2	215
BIBLIOGRAFÍA	218
Capítulo 6 ALGORITMO PARA MODIFICAR LA MATRIZ IMPEDANCIA DE NODOS ...	219
6.1 OBJETIVO	219
6.2 INTRODUCCIÓN	220
6.3 DEFINICIONES Y NOMENCLATURA	221
6.4 ALGORITMO DE MODIFICACIÓN	222
6.4.1 EJEMPLO	223
6.5 DERIVACIÓN	227
Apéndice E DEMOSTRACIÓN DE (6.49)	235

E.1 DESARROLLO	235
BIBLIOGRAFÍA	236

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1	Circuito Equivalente de los principales componentes de un Sistema Eléctrico de Potencia	4
Fig. 1.2	Circuito equivalente simplificado de un mismo transformador monofásico	4
Fig. 1.3	El transformador como adaptador de impedancias	5
Fig. 1.4	Sistema eléctrico de potencia del ejemplo 1.1	7
Fig. 1.5	Representación en tanto por uno del sistema del ejemplo 1.1	11
Fig. 1.6	Símbolos aprobados por la Asociación Americana de Normas para representar los aparatos en un diagrama unifilar	16
Fig. 1.7	Diagrama unifilar del sistema ejemplo 1.3	19
Fig. 1.8	Diagrama de impedancias en tanto por uno del sistema ejemplo 1.3	21
Fig. A.1	Conjunto de 3 circuitos equivalentes de un transformador monofásico interconectados en un banco trifásico $\Delta - Y$	24
Fig. A.2	Otra versión de la Figura A-1	24
Fig. B.1	Diagrama unifilar de dos líneas mutuamente acopladas de diferente voltaje nominal	28
Fig. C.1	Despreciar el efecto capacitivo permite interconectar los terminales de la misma polaridad relativa de un transformador tridevanado	32
Fig. C.2	Diagrama constructivo de un Transformador monofásico	33
Fig. C.3	Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las impedancias en el primario	34
Fig. C.4	Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las impedancias ubicadas en el secundario	36
Fig. C.5	Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las	

	impedancias ubicadas en el terciario	38
Fig. 2.1	Sistema elemental de transmisión de energía	48
Fig. 2.2	Sistema de potencia trifásico	51
Fig. 2.3	Circuito equivalente monofásico de un sistema de transmisión de longitud media	62
Fig. 2.4	Diagrama unifilar de un sistema de transmisión típico	65
Fig. 2.5	Diagrama fasorial para ilustrar la influencia de la potencia reactiva en la magnitud del voltaje	67
Fig. 3.1	Sistema de Potencia de 3 barras interconectadas en anillo	72
Fig. 3.2	Circuito equivalente del sistema de potencia de la Figura 3.1	72
Fig. 3.3	Circuito equivalente por fase del sistema eléctrico de potencia cuyo diagrama unifilar se muestra en la figura 3.1	73
Fig. 3.4	Interpretación geométrica del Método de Gauss	84
Fig. 3.5	Interpretación geométrica del factor de aceleración	88
Fig. 3.6	Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson para resolver $f(x) = 0$	94
Fig. 3.7	Solución gráfica del problema del ejemplo 5	95
Fig. 3.8	Modificación del algoritmo de Gauss-Seidel para considerar barras de voltaje controlado	106
Fig. 3.9	Diagrama unifilar del ejemplo	107
Fig. 3.10	Representación del transformador con su admitancia en el lado de las derivaciones y relación de transformación $1 : t$	128
Fig. 3.11	Circuito equivalente π del transformador con derivaciones de la Figura 3.9 en términos de su admitancia nominal y de la relación de transformación	129
Fig. 3.12	Representación del transformador con su admitancia en el lado	

	opuesto al de las derivaciones y relación de transformación $1 : a$	130
Fig. 3.13	Circuito equivalente π del transformador con derivaciones de la Figura 3.12 en términos de su admitancia nominal y de la relación de transformación	131
Fig. 4.1	Diagrama de circuito de un fallo paralelo general	133
Fig. 4.2	Diagrama unifilar de un sistema trifásico	135
Fig. 4.3	Representación circuital del sistema eléctrico trifásico de la Figura 4.2	136
Fig. 4.4	Gráfico orientado del circuito de la Figura 4.3	137
Fig. 4.5	Desbalance paralelo para ilustrar el método general de obtener la matriz admitancia de fallo $y_F^{a,b,b}$	143
Fig. 4.6	Equivalente de Thévenin del circuito de prefallo conectado a través de una admintancia de fallo	144
Fig. 4.7	Diagrama unifilar del sistema del ejemplo 2	145
Fig. 4.8	Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.29) (red de secuencia alpha α)	149
Fig. 4.9	Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.30) (red de secuencia β)	150
Fig. 4.10	Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.31) (red de secuencia γ)	151
Fig. 4.11	Determinación experimental de las impedancias de secuencia de un sistema de transmisión	164
Fig. 4.12	Equivalentes de Thévenin de cada una de las redes de secuencia	165
Fig. 4.13	Diagrama de circuito para el fallo Línea-Tierra L-G	168
Fig. 4.14	Interconexión de las redes de secuencia para un fallo línea tierra	169
Fig. 4.15	Diagrama de circuito de un fallo Línea-Línea-Tierra LL-G	170

Fig. 4.16	Interconexión de las redes de secuencia para fallo doble Línea-Tierra o LL-G	172
Fig. 4.17	Interconexión de las redes de secuencia para el fallo simultáneo Línea-Tierra y Línea-Línea	174
Fig. 4.18	Diagrama de circuito del fallo trifásico simétrico a tierra LLL-G	175
Fig. 4.19	Interconexión de las redes de secuencia para el fallo trifásico simétrico a tierra	176
Fig. 4.20	Red de secuencia cero del sistema de la Figura 4.7	178
Fig. 4.21	Red de secuencia positiva del sistema de la Figura 4.7	179
Fig. 4.22	Red de secuencia positiva del sistema de la Figura 4.7	180
Fig. 4.23	Red de secuencia negativa del sistema de la Figura 4.7	181
Fig. 4.24	Figura 4.25 Red de secuencia negativa del sistema del ejemplo	182
Fig. D.1	Diagramas de conexiones internas de los transformadores de potencia trifásicos de acuerdo a la norma americana	188
Fig. D.2	Posiciones relativas de los terminales en el tanque de un transformador de acuerdo a la norma americana	188
Fig. D.3	Dos alternativas, de entre muchas, para conectar los devanados de un transformador $Y - \Delta$ para que satisfaga la norma expresada en el diagrama de la Figura D.1(b)	189
Fig. D.4	Desplazamientos angulares de las componentes de secuencia de voltajes de fase y corrientes de línea en transformadores $\Delta - Y$ y $Y - \Delta$.	191
Fig. D.5	Desplazamiento angular entre las componentes de secuencia del voltaje de un lado y el de la misma secuencia en el otro para un transformador $\Delta - Y$ con la asignación de fases mostrada	193
Fig. D.6	Diagrama que muestra que las relaciones de fase entre las componentes de secuencia de las corrientes de línea en ambos lados del transformador cuando en un lado se definen saliente y en el otro	

	entrando al transformador	194
Fig. D.7	Circuito equivalente del transformador trifásico para la red de secuencia positiva (a) y negativa (b) teniendo en cuenta el desplazamiento angular introducido por la conexión y la impedancia de dispersión	195
Fig. D.8	Circuito equivalente del transformador trifásico para la red de secuencia positiva (a) y negativa (b) teniendo en cuenta el desplazamiento angular introducido por la conexión y la impedancia de dispersión	196
Fig. D.9	Representación de una fase del $Y - Y$ equivalente de un transformador trifásico de dos devanados por fase en la red de secuencia cero	197
Fig. D.10	Representación del transformador trifásico de 3 devanados por fase en la red de secuencia cero	198
Fig. D.11	Distribución de los flujos magnéticos de secuencia cero en transformadores trifásicos para los tipos de núcleo más utilizados: (a) tipo columna; (b) tipo acorazado	199
Fig. 5.1	Definición e interpretación circuital de los elementos de la matriz impedancia de nodos	203
Fig. 5.2	Equivalente de Thévenin entre dos nodos en función de algunos de los elementos de la matriz impedancia de nodos	205
Fig. 5.3	Representación de una red parcial al que se adiciona un elemento radial	206
Fig. 5.4	Una consecuencia del teorema de reciprocidad es que la lectura de los voltímetros es idéntica en ambos casos y la matriz impedancia de nodos es simétrica	212
Fig. 6.1	Diagrama unifilar de un fallo simple (a), de un fallo de línea abierta (b) y de uno de extremo de línea (c)	220
Fig. 6.2	Grupo acoplado α que consta de $M + 1$ elementos	227
Fig. 6.3	Grupo acoplado equivalente al de la Figura 6.2	228

LISTA DE TABLAS

Tabla A.1	La representación en tanto por uno del Y-Y equivalente no depende de la conexión particular del transformador trifásico	25
Tabla C.1	Datos de placa del transformador del ejemplo 1	40
Tabla C.2	Resultados de los ensayos experimentales o pruebas de corto-circuito aplicadas al transformador de ejemplo 1	40
Tabla C.3	Cálculo de corrientes a través del devanado excitado	41
Tabla C.4	Impedancias de las pruebas de corto-circuito del ejemplo 1	42
Tabla C.5	Datos de placa nominales del transformador trifásico del ejemplo 2	42
Tabla C.6	Resultados de los ensayos experimentales o pruebas de corto-circuito aplicadas al transformador del ejemplo 2	43
Tabla C.7	Cálculo de corrientes nominales monofásicas y de línea del transformador trifásico del ejemplo 2	43
Tabla C.8	Impedancias correspondientes a las pruebas de corto-circuito para un conjunto de devanados abrazados a la misma columna	44
Tabla 3.1	Clasificación de las barras de un Sistema Eléctrico de Potencia	81
Tabla 3.2	Datos de línea para el ejemplo 3.4	107
Tabla 3.3	Datos de barra para el ejemplo 3.4	108
Tabla 3.4	Resultados de la aplicación del Método de Gauss-Seidel al problema del Ejemplo 3.x	112
Tabla 3.5	Datos de barra para el ejemplo 3.4	123
Tabla 3.6	Flujos de potencia activa y reactiva en el sistema del ejemplo 3.8	127
Tabla 4.1	Caracterización de los elementos trifásicos del sistema del ejemplo 1	138

Tabla 4.2	Caracterización de los fallos paralelo LLL-G y LLL	140
Tabla 4.3	Caracterización de los fallos paralelo L-G y LL-G	141
Tabla 4.4	Caracterización de los fallos paralelo LL y simultáneo L-G y LL	142

Prefacio

Este documento se elabora con el propósito de servir de texto guía para el curso “*Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*” del programa de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, después de más de 25 años de experiencia en el ejercicio docente. Deseo vehementemente que la comunidad científica en todos los ámbitos lo someta a la crítica más rigurosa porque estoy seguro es la única forma de enriquecerlo, no solo en su contenido sino también en su enfoque pedagógico y metodológico. De antemano, agradezco profundamente me hagan llegar sus comentarios y sugerencias a la dirección electrónica (aacosta@utp.edu.co o calamo@col2.telecom.com.co).

Aunque de cada tópico se incluyen ejemplos resueltos en el texto, en esta primera edición no se proponen ejercicios al final de cada capítulo, pero estoy trabajando en la digitalización del archivo de exámenes con la intención de incluirlos en una versión que estará disponible en muy corto tiempo.

Además, por limitaciones de tiempo y de infraestructura logística, no se incluye la codificación en lenguaje C++ de programas para resolver el problema de Flujos de Carga y el de Corto Circuito, los cuales hacen uso de una plantilla de matriz dispersa que fue desarrollada conjuntamente con el exalumno e Ingeniero Carlos Galván Ceballos, y que permite que el número de nodos y de elementos esté limitado únicamente por los recursos de memoria central disponibles en cada estación de cómputo. Es nuestro interés en un futuro mediano publicar una versión de este libro que incluye esta información y dejarlo disponible en la red para que sea accesada vía Internet desde cualquier lugar del mundo. En este momento se dispone de una versión electrónica de esta primera edición la cual se puede obtener visitando la página Web del autor www.utp.edu.co/~aacosta. El archivo obtenido se descomprime mediante el *Winzip.exe* para obtener uno en formato *.pdf (portable data format) que se puede leer y/o imprimir mediante el *Acrobat Reader* (el cual se puede bajar de www.adobe.com). Cuando se habilita en éste la herramienta de navegación se puede ir directamente a cualquier parte del documento.

Aunque no del todo necesario se recomienda que el lector esté familiarizado con la temática de los sistemas energéticos y eléctricos. En particular en la Universidad Tecnológica de Pereira el estudiante ha tenido la oportunidad de trabajar los siguientes tópicos en cursos previos:

- 1 El papel de los transformadores en el contexto de la generación y la transmisión de grandes cantidades de energía a través de largas distancias para minimizar pérdidas y en el de su transformación para el aprovechamiento del usuario final así como con los principios de la conexión de los transformadores en paralelo.

- 2 Un curso inicial de Máquinas Eléctricas Rotatorias (Conversión de Energía) y uno sobre Sistemas de Transmisión de Energía en los que partiendo de una descripción cualitativa de los fenómenos electromagnéticos aplica el modelo matemático de la Teoría de Circuitos a estos aparatos eléctricos concretos.
- 3 La generación y solución automática, es decir mediante el computador digital, de los conjuntos equivalentes linealmente independientes de ecuaciones que describen completamente el comportamiento de una red arbitraria que parte de la formulación matricial de las mismas y en el que se cubre el método de las matrices de incidencia para obtener tanto la matriz impedancia de nodos y de anillos y la matriz admitancia de nodos y de cortes así como la interpretación circuital de cada uno de sus elementos.
- 4 La solución de un circuito trifásico balanceado como uno monofásico, el teorema de las componentes simétricas y su aplicación a sistemas desbalanceados elementales.

En el capítulo 1 se obtiene el modelo de circuito de una interconexión arbitraria de transformadores, líneas de transporte de energía y generadores trifásicos (sistema eléctrico de potencia) a partir de una definición axiomática del circuito equivalente de cada uno de sus componentes y de la interpretación de los datos de placa de generadores y transformadores, se definen también los valores en tanto por uno y se discuten sus ventajas como herramienta de análisis de los sistemas eléctricos de potencia (tanto bajo condiciones de equilibrio y simetría como también en operación desbalanceada).

Se trata primero la representación de sistemas eléctricos de potencia monofásicos, a pesar de que en la práctica están en desuso, porque, como se sabe, el análisis de sistemas eléctricos de potencia trifásicos bajo condiciones de equilibrio se puede hacer, y es la costumbre, mediante un “equivalente monofásico”.

Además, el comportamiento de un sistema eléctrico de potencia trifásico bajo condiciones desbalanceadas se puede estudiar superponiendo su respuesta a tres excitaciones balanceadas, cada una de las cuales se obtiene del correspondiente equivalente monofásico. Se pone especial énfasis en la interpretación de los datos de placa y en los criterios para elaborar éstas a partir de los ensayos experimentales.

En el Apéndice A se demuestra que si se tienen tres transformadores monofásicos idénticos o los tres pares de devanados de una unidad trifásica, **YA CONSTRUIDOS**, *la conexión particular a que sean sometidos no tiene influencia en la representación en tanto por uno del Y-Y equivalente*.

En el apéndice B se deriva la representación en tanto por uno de la impedancia mutua entre dos sistemas de transmisión de diferente voltaje nominal, que por esta misma razón poseen diferentes valores de impedancia base

En el Apéndice C se deriva *un procedimiento* para obtener el circuito equivalente del

transformador de tres devanados por fase a partir de ensayos y mediciones en sus terminales accesibles y se establecen y justifican claramente las suposiciones bajo las cuales se aplica.

En el capítulo 2 se discuten algunos factores que afectan el cumplimiento de los objetivos de un sistema eléctrico de potencia y se estudian los fenómenos más importantes que se presentan en un sistema eléctrico de potencia cuando a partir de unas condiciones de balance y simetría se presentan pequeñas perturbaciones. Se estudia en detalle la relación entre el balance de potencia activa y la frecuencia del sistema y la influencia de cambios en los flujos de potencia activa y reactiva tanto en las magnitudes como en los ángulos de fase de los voltajes del sistema.

En el capítulo 3 se deriva y justifica un método diferente para obtener la matriz admitancia de nodos que se aplica únicamente cuando no hay elementos inductivos mutuamente acoplados, el cual parece suficiente ya que los métodos de flujos de carga más utilizados y difundidos en la literatura utilizan dicha matriz. Los métodos que se apoyan en la matriz impedancia de nodos para el estudio de los sistemas bajo condiciones balanceadas no son muy populares entre otras cosas por el esfuerzo computacional para calcularla y porque no es una matriz dispersa como la admitancia. También se plantea el conjunto de ecuaciones no lineales linealmente independientes que describe completamente el comportamiento del sistema eléctrico de potencia bajo condiciones de equilibrio de las cargas y simetría de la red, se justifican métodos sistemáticos adaptados a la programación en computadores digitales para construir matrices en función de las cuales se describe completamente el comportamiento del sistema, que además, son flexibles, es decir, que permiten investigar los efectos de cambios en la configuración y los valores de los parámetros con esfuerzos computacionales mínimos y se describen los fundamentos matemáticos de los métodos iterativos más difundidos en la literatura para resolverlas y se derivan los algoritmos para el problema de flujos de potencia en la red. Se discute también la representación del transformador provisto de derivaciones para alterar la relación de transformación nominal.

En el capítulo 4 se derivan y justifican métodos sistemáticos para obtener las respuestas (corrientes y voltajes) de régimen sinusoidal permanente que se presentan en un sistema eléctrico de potencia trifásico, balanceado y simétrico cuando en una localización geográfica de éste (identificada mediante la letra P) se introduce un fallo paralelo (desequilibrio). Los “Estudios de Corto Circuito” se muestran inicialmente como una aplicación del teorema de Thévenin y de la teoría de circuitos eléctricos al análisis de sistemas trifásicos en función de cantidades de fase, lo que permite presentar las componentes simétricas como una transformación lineal de variables, a partir de lo cual se justifica el algoritmo o secuencia detallada de instrucciones para estudios de fallos manualmente. Debido a su importancia en la selección de interruptores se define también la potencia de corto circuito monofásica y trifásica y se describe y justifica un

algoritmo para obtener a partir de ellas las impedancias de Thévenin de las redes de secuencia positiva y cero

En el capítulo 5 se define la matriz impedancia de nodos $[Z]$ de una red monofásica y, a partir de la interpretación circuital de cada uno de sus elementos, se deriva un algoritmo para construirla adicionando cada vez un elemento. Se hace énfasis en la interpretación circuital de sus elementos y en la utilización de los mismos para hallar tanto la corriente total de fallo como las corrientes en los elementos conectados a él sin necesidad de resolver ni el circuito de prefallo ni el de postfallo.

En el capítulo 6 se deriva y justifica un algoritmo para modificar la matriz impedancia de nodos de un circuito arbitrario cuando se desconecta, de uno de sus nodos terminales, uno de sus elementos que puede pertenecer o no a un grupo de elementos inductivos mutuamente acoplados. El enfoque propuesto no requiere inversión de matrices (como el descrito en la referencia [1] de dicho capítulo), lo que permite reducir el tiempo de ejecución. Además, mediante su aplicación se pueden analizar simultáneamente *fallos de línea abierta y de extremo de línea* que son, respectivamente, los que ocurren: *a)* en una barra una vez que ha operado la protección de uno de los elementos conectados a él (*fallo de línea abierta*) y *b)* inmediatamente después del interruptor que protege la línea de transporte y éste ya ha actuado para desconectar la barra (*fallo de extremo de línea*).

Debo aclarar que este esfuerzo no hubiera sido posible sin el apoyo institucional que me brindó la *UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA*. Agradezco también la comprensión de mi familia y el apoyo continuo, de muy variadas maneras, de algunos de mis compañeros de trabajo.

No quiero dejar pasar esta oportunidad sin dedicar este libro a aquellos por y para quienes fue hecho con profundo amor: mis estudiantes, especialmente a aquellos que no dudaría en llamar mis discípulos, porque supieron tener la paciencia de escuchar y poner en práctica mi discurso; a aquellos que se esfuerzan por superar a sus maestros; a quienes no consideran un delito estudiar sábados y domingos y lo hacen sin tiempo ni espacio como el amor; a quienes incluyeron en su proyecto de vida el propósito de mantenerse actualizados a pesar de que pasen los años y trabajan en ello cada día con un estilo de trabajo duro y vida sencilla y de esa manera engrandecen la imagen que tienen de sí mismos, de la Institución que los educó y a la Patria.

Alvaro Acosta Montoya

Capítulo 1

REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

1.1 OBJETIVOS

- I Obtener el modelo de circuito de una interconexión arbitraria de transformadores, líneas de transporte de energía y generadores trifásicos (sistema eléctrico de potencia) a partir de una definición axiomática del circuito equivalente de cada uno de sus componentes¹ y de la interpretación de los datos de placa de generadores y transformadores.
- II Definir los valores en tanto por uno y discutir sus ventajas como herramienta de análisis de los sistemas eléctricos de potencia (tanto bajo condiciones de equilibrio y simetría como también en operación desbalanceada).

Se trata primero la representación de sistemas eléctricos de potencia monofásicos, a pesar de que en la práctica están en desuso, porque, como se sabe, el análisis de sistemas eléctricos de potencia trifásicos bajo condiciones de equilibrio se puede hacer, y es la costumbre, mediante un “equivalente monofásico”. Además, el comportamiento de un sistema eléctrico de potencia trifásico bajo condiciones desbalanceadas se puede estudiar superponiendo su respuesta a tres excitaciones balanceadas, cada una de las cuales se obtiene del correspondiente equivalente monofásico. Lo anterior explica la vigencia, validez y generalidad de los conceptos y criterios desarrollados en la primera parte de este trabajo.

¹ Este trabajo supone que el lector ya sabe como obtener experimentalmente el circuito equivalente del transformador monofásico y el nominal π de líneas de transmisión de energía cortas, medias y largas

PARTE I

SISTEMAS MONOFÁSICOS

1.2 CIRCUITO EQUIVALENTE DE LOS PRINCIPALES COMPONENTES

La Figura 1.1 ilustra los circuitos equivalentes de un mismo transformador monofásico (a) y (b), de un sistema de transmisión (c) y los de un generador síncrono: (d) para estudios de cortocircuito y (e) para análisis del sistema bajo condiciones balanceadas. Una justificación de estos modelos está más allá del alcance de este trabajo y existen excelentes referencias bibliográficas sobre el particular [3] , [2] , [2] . Sin embargo, es necesario hacer las siguientes observaciones:

- 1 El nivel de precisión requerido en los cálculos y la naturaleza del estudio permiten hacer simplificaciones adicionales. Así, por ejemplo, mientras las admitancias paralelo Y_ϕ de los transformadores (de excitación) y de los sistemas de transmisión y_{sh} suelen omitirse en estudios de corto circuito, debido a la poca influencia de ellas en los resultados y a la complejidad de los cálculos cuando se tienen en cuenta, sí deben considerarse en el análisis de estabilidad transitoria. Similarmente, las impedancias internas de los

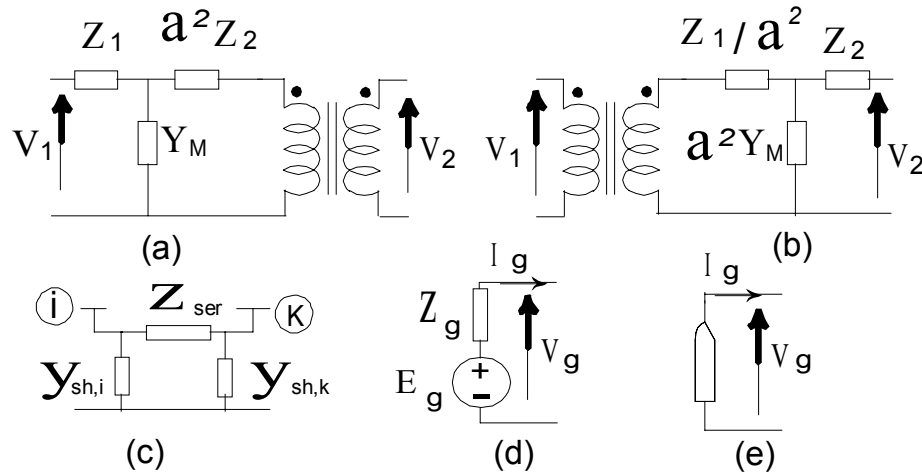


FIGURA 1.1 Circuito Equivalente de los principales componentes de un Sistema Eléctrico de Potencia

generadores síncronos no son tan importantes en el análisis del sistema en condiciones balanceadas.

- 2 Cuando se desprecia la admitancia paralelo o de excitación del circuito equivalente del transformador ($Y_\phi = 0$) éste se reduce a un transformador ideal cuya relación de transformación es la de voltajes nominales V_H y V_X con una impedancia conectada en cualquiera de los dos lados, como se ilustra en la Figura 1.2.

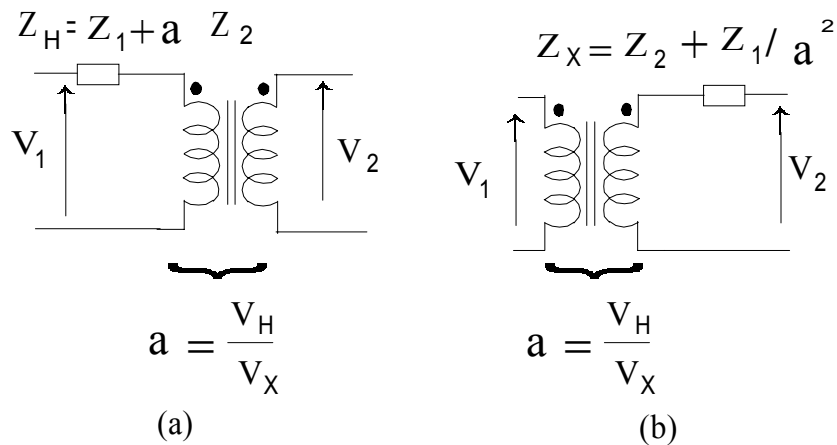


FIGURA 1.2 Circuito equivalente simplificado de un mismo transformador monofásico

Sin embargo, como puede verse de la Figura 1.1 (a) y (b) sus valores no son independientes, es decir,

$$\begin{aligned} a &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_H}{V_X} \\ Z_H &= Z_1 + a^2 Z_2 & Z_X &= Z_2 + \frac{Z_1}{a^2} \\ Z_H &= a^2 Z_X \end{aligned} \quad (1.1)$$

- 1 La Figura 1.3 es la representación simbólica de un transformador ideal en cuyo secundario se ha conectado una impedancia de carga Z_C . Combinando las ecuaciones del transformador ideal y la definición de impedancia, es decir,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad Z_C = \frac{V_2}{I_2} \quad (1.2)$$

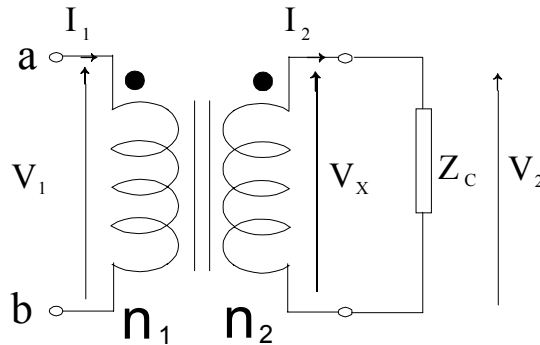


FIGURA 1.3 El transformador como adaptador de impedancias

fácilmente se puede demostrar que la impedancia vista desde el primario Z_{ab} viene dada por la expresión

$$Z_{ab} = a^2 Z_C = \frac{V_1}{I_1} \quad (1.3)$$

- 2 El circuito equivalente simplificado del transformador ($Y_\phi = 0$) sugiere que cortocircuitando uno de sus lados la impedancia medida desde el otro es exactamente igual a

la del circuito equivalente, lo cual constituye un método para determinarla experimentalmente.

- 3 Un generador síncrono se representa, para analizar el sistema bajo condiciones de equilibrio, mediante una fuente no ideal que inyecta corriente al nodo al cual está conectado de acuerdo a la ecuación:

$$I_g = \frac{P_g - Q_g}{V_g^*} \quad V_g^* \text{ complejo conjugado de } V \quad (1.4)$$

mientras que para estudios de corto circuito el generador se representa mediante una fuerza electromotriz E_g en serie con un impedancia z_g .

1.3 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE PLACA

Los datos de placa de un generador incluyen entre otros: la potencia aparente y el voltaje nominales S_N y V_N , respectivamente, y un valor de impedancia en tanto por uno $\hat{z}_N$, a partir de los cuales se puede obtener la impedancia en ohmios z_g de su circuito equivalente de la Figura 1.1 (d) como lo indica la siguiente ecuación:.

$$z_g = \hat{z}_N \frac{V_N^2}{S_N} \quad (1.5)$$

La placa de un transformador contiene, entre otros datos, los siguientes: La potencia aparente nominal S_N ; la relación de transformación que se supone es la misma que la que hay entre los voltajes nominales de alta y baja tensión, que se designarán con V_H y V_X , respectivamente, y una impedancia en tanto por uno $\hat{z}_N$, a partir de los cuales se puede obtener cualquiera de los circuitos equivalentes de la Figura 1.2 de la siguiente manera:

$$Z_H = \hat{z}_N \frac{V_H^2}{S_N} \quad Z_X = \hat{z}_N \frac{V_X^2}{S_N} \quad (1.6)$$

1.3.1 EJEMPLO 1.1

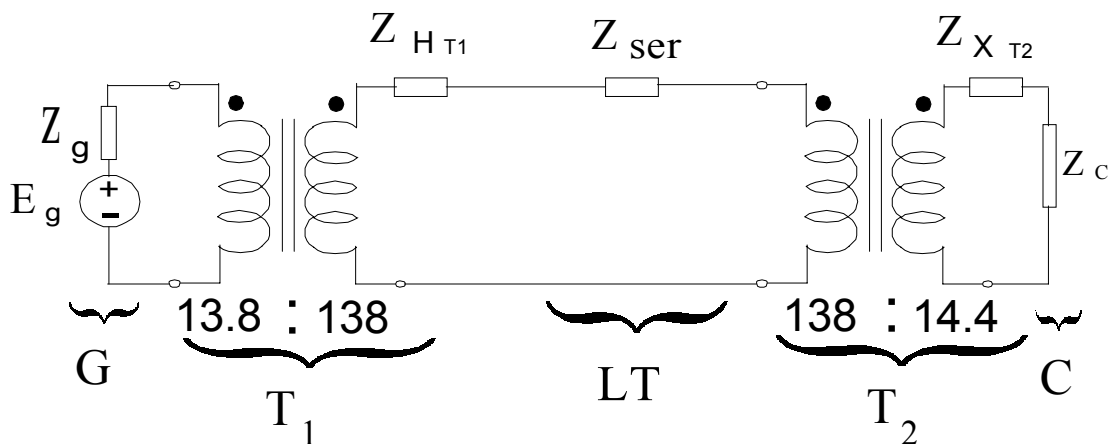


FIGURA 1.4 Sistema eléctrico de potencia del ejemplo 1.1

Un sistema monofásico consta de un generador G que suministra energía a una carga C a través de una línea de transmisión LT que tiene instalados sendos transformadores en ambos extremos, cuyos lados de alta están conectados a ella. Las características de los componentes de este sistema son los siguientes:

$$G: S_N = 15 \text{ MVA } V_N = 13.2 \text{ kV } \hat{z}_N = j0.15 \text{ p. u.}$$

$$T_1 S_N = 10 \text{ MVA } V_X = 13.8 \text{ kV } V_H = 138 \text{ kV } \hat{z}_N = j0.1 \text{ p. u. } \hat{Y}_\phi = j0.0 \text{ p. u.}$$

$$T_2 S_N = 10 \text{ MVA } V_X = 14.4 \text{ kV } V_H = 138 \text{ kV } \hat{z}_N = j0.08 \text{ p. u. } \hat{Y}_\phi = j0.0 \text{ p. u.}$$

$$LT: z_{ser} = (20 + j 100) \quad y_{sh,i} = y_{sh,j} = 0$$

$$C: Z_C = 300 \Omega$$

Hacer el circuito equivalente del sistema y calcular el valor de sus impedancias. La Figura 1.4 muestra el circuito equivalente del sistema. Aplicando (1.5) y se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
z_g &= j0.15 \frac{(13.2)^2}{15} = j1.7424 \, \Omega \\
Z_{HT1} &= j0.1 \frac{(138)^2}{10} = j190.44 \, \Omega \\
z_{ser} &= (20 + j100) \, \Omega \\
Z_{XT2} &= j0.08 \frac{(14.4)^2}{10} = j1.6589 \, \Omega \\
Z_C &= 300 \, \Omega
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.4 DEFINICIÓN DE VALORES POR UNIDAD

El modelo de circuito para analizar el comportamiento de sistemas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, en *régimen sinusoidal permanente*, introduce conceptos tales como corriente, voltaje, impedancia y potencia compleja. Es costumbre universal representar estas cantidades mediante números complejos y designarlas con las letras I , V , Z y S , respectivamente. Si en la solución de un problema particular estas cantidades se dividen, respectivamente, por las *MAGNITUDES ESCALARES positivas* I_b , V_b , Z_b y S_b , cuyos valores se pueden fijar, en principio, *ARBITRARIAMENTE*, que se denominan valores de base o de referencia y tienen las mismas dimensiones, se obtienen sus *VALORES POR UNIDAD* (*p. u.*), los cuales son complejos sin dimensiones que se distinguen colocando un *capote* sobre las mismas letras. Esta definición se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{I}}{I_b} \quad \hat{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{V_b} \quad \hat{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{Z}}{Z_b} \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}}{S_b} \tag{1.8}$$

Para que los valores en tanto por uno satisfagan las conocidas ecuaciones tomadas de la teoría elemental de circuitos eléctricos y denotando el complejo conjugado de $(.)$ como $(.)^*$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{V}} &= \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{I}} & \frac{\mathbf{V}}{V_b} &= \frac{\mathbf{Z}}{Z_b} \frac{\mathbf{I}}{I_b} \\
\hat{\mathbf{S}} &= \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{I}}^* & \frac{\mathbf{S}}{S_b} &= \frac{\mathbf{V}}{V_b} \frac{\mathbf{I}}{I_b}^*
\end{aligned} \tag{1.9}$$

se debe cumplir

$$V_b = Z_b I_b \quad S_b = V_b I_b \quad (1.10)$$

De (1.10) se observa que la elección ARBITRARIA de los valores base para dos de las cantidades, automáticamente determina los de las otras dos para que se satisfaga (1.9). En sistemas de potencia se acostumbra elegir valores base para el voltaje y la potencia ya que son los datos usualmente conocidos de casi todos los equipos. Por tanto,

$$I_b = \frac{S_b}{V_b} \quad Z_b = \frac{V_b}{I_b} = \frac{V_b^2}{S_b} \quad (1.11)$$

De la segunda de las ecuaciones (1.11) y de (1.5) y (1.6) para obtener el circuito equivalente de cada generador o transformador a partir de sus datos de placa se concluye que *la impedancia suministrada por los fabricantes es un valor en tanto por uno que supone que se han tomado como referencia sus valores nominales correspondientes.*

1.5 JUSTIFICACIÓN Y VENTAJAS DE LOS VALORES EN TANTO POR UNO

Se definen partes de un sistema eléctrico de potencia como aquéllas que están separadas entre sí mediante un transformador, es decir cada una de ellas tiene un nivel de voltaje nominal diferente. Como se verá más adelante, para superar las dificultades que surgen en el análisis de circuitos que contienen transformadores ideales se elige arbitrariamente:

- I El voltaje de referencia en una parte (cualquiera) del sistema. Se supone que el valor del voltaje base en todas las demás partes queda automáticamente determinado por esta elección inicial arbitraria y la relación de transformación de los transformadores que las separan.
- II Un valor de potencia base que se supone el mismo en todas partes.

Nótese de (1.11) que lo anterior implica que el valor de la impedancia base es diferente en cada parte. Así por ejemplo, si V_{bH} es el valor base de voltaje en el lado de alta del

transformador de la Figura 1.2 y $S_{b1} = S_{b2} = S_b$ el de la potencia base, entonces

$$\begin{aligned}\frac{V_{bH}}{V_{bX}} &= \frac{V_H}{V_X} = \frac{n_H}{n_X} = a \\ V_{bH} &= aV_{bX}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Combinando (1.12) con (1.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}Z_{bH} &= \frac{V_{bH}^2}{S_b} = \frac{(aV_{bX})^2}{S_b} = a^2 \frac{V_{bX}^2}{S_b} = a^2 Z_{bX} \\ \hat{Z}_H &= \frac{Z_H}{Z_{bH}} = \frac{a^2 Z_X}{a^2 Z_{bX}} = \hat{Z}_X\end{aligned}\tag{1.13}$$

Es decir, si se utiliza el circuito equivalente de la Figura 1.2 (a) y se divide Z_H por Z_{bH} se obtiene el mismo resultado que utilizando el circuito equivalente de la Figura 1.2 (b) dividiendo Z_X por Z_{bX} . *En conclusión, el análisis de un sistema eléctrico de potencia en tanto por uno se puede hacer omitiendo los transformadores ideales en el circuito equivalente que lo representa, cuando se eligen los valores base de acuerdo con los criterios descritos.*

Vale la pena enfatizar la distinción que debe hacerse entre los *valores nominales* que son inmodificables una vez cualquier aparato ha sido construido y que fueron parámetros de diseño si no se exceden los cuales los fabricantes garantizan una vida útil larga, los *de operación* que corresponden a los que se someten los equipos en la vida real (son medidos experimentalmente) y los que, por lo menos en principio, se escogen arbitrariamente y sirven *de referencia o base*. Sin embargo, cuando éstos coinciden o se suponen en valores cercanos a los nominales, el análisis del sistema bajo condiciones balanceadas en tanto por uno, además de facilitar los cálculos, permite por simple inspección darse cuenta de posibles errores aritméticos aplicando un simple criterio de lógica. Así por ejemplo, las magnitudes de todos los voltajes deben estar cercanos a la unidad en tanto por uno².

Además, aunque las impedancias en ohmios de los circuitos equivalentes de generadores y de transformadores es muy sensible a su tamaño, sus valores en tanto por uno, tomando como base sus respectivos valores nominales, no varían apreciablemente, es decir, aparatos de potencias aparentes nominales muy diferentes tienen valores nominales de impedancia en tanto por uno muy parecidas. En otras palabras, máquinas con

² Los sistemas de transmisión se diseñan para que su regulación bajo condiciones de plena carga no exceda el 5%. Además, los transformadores van provistos de derivaciones para obtener un mejor perfil de voltajes.

valores nominales dentro de un amplio margen tienen impedancias en tanto por uno en un rango muy estrecho, aunque sus valores óhmicos difieran apreciablemente. Esto permite que cuando, por alguna razón, se desconoce el valor de la impedancia en tanto por uno de alguno de ellos se pueda recurrir a tablas de valores típicos para efectuar una estimación razonablemente correcta de su valor por comparación con el parámetro de otro dispositivo similar.

1.5.1 EJEMPLO 1.2

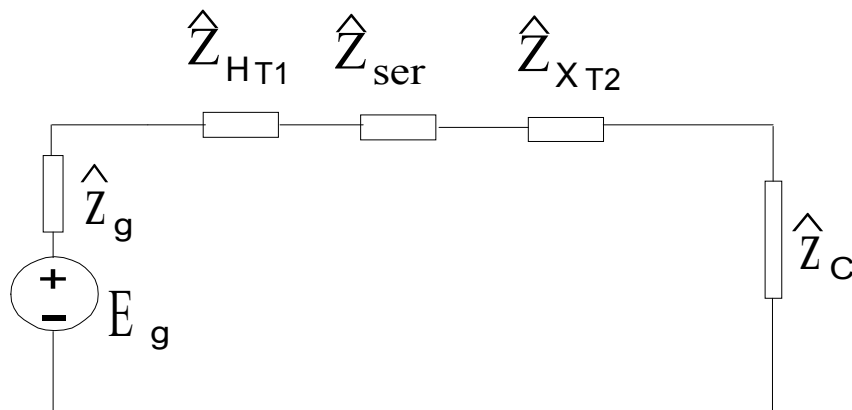


FIGURA 1.5 Representación en tanto por uno del sistema del ejemplo 1.1

Para el sistema eléctrico de potencia descrito en el EJEMPLO 1.1, obtener el voltaje en terminales del generador y la corriente a través de él para que el voltaje en la carga sea de 14.4 kV

Omitiendo los transformadores ideales de la Figura 1.4 se obtiene el circuito equivalente de la Figura 1.5. Los valores numéricos de sus impedancias dependen de los valores base o de referencia que se escojan. Suponiendo que se elige arbitrariamente

$$V_{bH} = 154 \text{ kV} \quad S_b = 50 \text{ Mva} \quad (1.14)$$

Con esta elección inicial y la relación de transformación de los transformadores se pueden calcular los valores de voltaje base para el lado del generador V_{bG} y de la carga V_{bC}

$$V_{bG} = 154 \frac{13.8}{138} \text{ kV} = 15.4 \text{ kV} \quad V_{bC} = 154 \frac{14.4}{138} \text{ kV} = 16.07 \text{ kV} \quad (1.15)$$

Reemplazando (1.14) y (1.15) en (1.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_{bH} &= \frac{(154)^2}{50} = 474.32 \, \Omega \\ Z_{bG} &= \frac{(15.4)^2}{50} = 4.7432 \, \Omega \\ Z_{bC} &= \frac{(16.07)^2}{50} = 5.1646 \, \Omega \end{aligned} \quad (1.16)$$

Los valores en tanto por uno deseados se obtienen dividiendo cada una de las impedancias en ohmios del circuito de la Figura 1.4 [ecuación (1.7)] por la impedancia base que corresponde a la parte donde ella aparece. Es decir,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_g &= j \frac{1.7424 \, \Omega}{4.7432 \, \Omega} = j \, 0.3674 \text{ p. u.} \quad \hat{Z}_{T1} = j \frac{190.44 \, \Omega}{474.32 \, \Omega} = j \, 0.4015 \text{ p. u.} \\ \hat{Z}_C &= \frac{300 \, \Omega}{5.1646 \, \Omega} = 58.0878 \text{ p. u.} \quad \hat{Z}_{T2} = j \frac{1.6582 \, \Omega}{5.1646 \, \Omega} = j \, 0.3212 \text{ p. u.} \\ \hat{Z}_{ser} &= \frac{(20 + j100) \, \Omega}{474.32 \, \Omega} = (0.0422 + j \, 0.2108) \text{ p. u.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Con los valores (1.17) y tomando como referencia el voltaje en la carga, fácilmente se puede resolver el circuito de la Figura 1.5 para obtener:

$$\begin{aligned} \hat{V}_C &= \frac{14.4 \text{ kV}}{16.07 \text{ kV}} = 0.8961 \text{ p. u.} \\ \hat{I}_C &= \frac{0.8961 \text{ p. u.}}{58.0878 \text{ p. u.}} = 0.01543 \text{ p. u.} \\ \hat{V}_g &= 0.8969 \angle 0.92^\circ \text{ p. u.} \end{aligned} \quad (1.18)$$

valores que se deben multiplicar por los correspondientes valores base para obtener

$$\begin{aligned}
I_C &= \left(\frac{50}{16.07} \right) 10^3 A * 0.01543 \text{ p.u.} = 48.0087 A \\
V_g &= 15.4 \text{ kV} * 0.8969 \angle 0.92^\circ \text{ p. u.} = 13.8123 \text{ kV}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

1.6 CAMBIO DE BASE

Es muy frecuente que los valores nominales de un aparato no coincidan con los que se han elegido como base, lo cual plantea el problema de obtener una impedancia en tanto por uno sobre unas bases dadas (S_b y V_b) a partir del dato de placa $\hat{z}_N$ que, como ya se sabe, supone valores de referencia nominales (S_N y V_N). El criterio para obtener la expresión deseada es recordar que su valor en ohmios es invariante. Es decir,

$$\begin{aligned}
z(\Omega) &= \hat{z}_N \frac{V_N^2}{S_N} = \hat{z}_b \frac{V_b^2}{S_b} \\
\hat{z}_b &= \hat{z}_N \left(\frac{V_N}{V_b} \right)^2 \left(\frac{S_b}{S_N} \right)
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Se advierte que en (1.20) el subíndice N se refiere a los valores conocidos o “viejos” (generalmente los nominales) mientras que el subíndice b identifica los valores “nuevos” o aquellos en base a los cuales se desea calcular el nuevo valor en tanto por uno de la impedancia.

Nótese que aplicando directamente (1.20) se pueden obtener los valores en tanto por uno $\hat{Z}_G$, $\hat{Z}_{T1}$ y $\hat{Z}_{T2}$ del EJEMPLO 1.2. Es decir,

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_G &= j 0.15 \text{ p.u.} \left(\frac{13.2 \text{ kV}}{15.4 \text{ kV}} \right)^2 \left(\frac{50 \text{ MVA}}{15 \text{ MVA}} \right) = j 0.3675 \text{ p. u.} \\
\hat{Z}_{T1} &= j 0.1 \left(\frac{138}{154} \right)^2 \left(\frac{50}{10} \right) = j 0.1 \left(\frac{13.8}{15.4} \right)^2 \left(\frac{50}{10} \right) = j 0.4015 \text{ p. u.} \\
\hat{Z}_{T2} &= j 0.08 \left(\frac{14.4}{16.07} \right)^2 \left(\frac{50}{10} \right) = j 0.08 \left(\frac{138}{154} \right)^2 \left(\frac{50}{10} \right) = j 0.3212 \text{ p. u.}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

que coinciden con los resultados de (1.17). Nótese que *en el caso de un transformador es indiferente que se utilice su voltaje nominal de alta o baja tensión, V_H o V_X , respectivamente, siempre y cuando también se haga uso de los correspondientes voltajes de*

14 Capítulo 1 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

referencia V_{bH} y V_{bX}

PARTE II

SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.7 DIAGRAMA UNIFILAR

Un sistema trifásico que opera bajo condiciones balanceadas se resuelve siempre mediante un circuito monofásico equivalente, para lo cual es necesario sustituir en el modelo matemático:

- 1 Cada transformador por un estrella-estrella equivalente que se define como uno que podría sustituir la conexión real sin que los demás elementos del sistema reconozcan la diferencia (en cuanto no alteraría las corrientes ni los voltajes a través de ellos). Es importante observar que la relación de transformación del Y-Y equivalente es exactamente igual a la de voltajes nominales entre líneas de la conexión real.
- 2 Las cargas en delta por un Y equivalente.
- 3 Los generadores trifásicos siempre se conectan en estrella para disminuir la relación de transformación del transformador (y por tanto su costo) que se requiere para obtener un nivel de voltaje deseado (el más económico) en el sistema de transmisión

16 Capítulo 1 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

una vez hecho lo cual se puede analizar el sistema a través de un circuito equivalente monofásico.

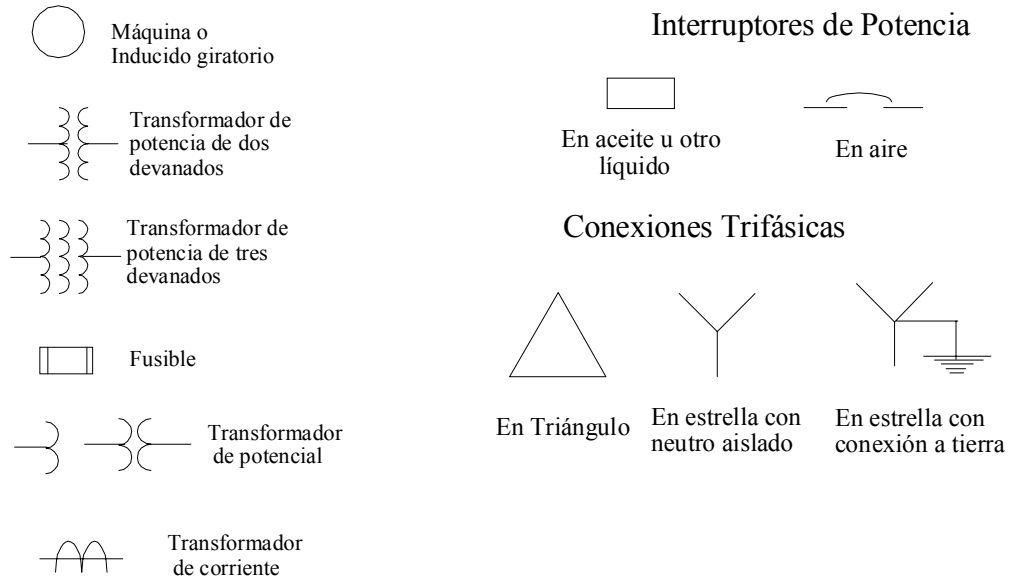


FIGURA 1.6 Símbolos aprobados por la Asociación Americana de Normas para representar los aparatos en un diagrama unifilar

Cuando se omite el neutro de retorno y los componentes del sistema se representan mediante símbolos normalizado como los de la Figura 1.6 se obtiene lo que se conoce con el nombre de diagrama unifilar, el cual además de mostrar la estructura topológica (localización geográfica e interconexión entre los elementos constitutivos) debe incluir la información más significativa de acuerdo a la naturaleza del estudio que se desea realizar. Así por ejemplo, la ubicación y características de los elementos de protección no tienen importancia en el análisis del sistema bajo condiciones balanceadas (problema de flujos de carga). Sin embargo, la rapidez con que actúen los relés e interruptores para aislar una falla juegan un papel de mucho peso en la estabilidad transitoria del sistema [2]

1.8 SELECCIÓN DE BASES

La ecuación (1.11) puede re-escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Z_b &= \frac{V_b^2}{S_b} = \frac{3V_b^2}{3S_b} = \frac{(\sqrt{3}V_b)^2}{3S_b} = \frac{V_{bL}^2}{S_{b-3\phi}} \\
V_{bL} &= \sqrt{3}V_b \quad S_{b-3\phi} = 3S_b
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Es decir, eligiendo arbitrariamente valores de referencia para el voltaje entre líneas V_{bL} y para la potencia total trifásica $S_{b-3\phi}$, definidos como en (1.22) se obtiene la impedancia base del circuito monofásico mediante el cual se analiza el circuito trifásico equilibrado. Es práctica habitual escoger el voltaje base entre líneas en una parte cualquiera del sistema y, a partir de este valor, calcular el de las demás partes mediante las relaciones de voltajes nominales entre líneas de los transformadores que las separan independientemente de su conexión, que son las mismas que las de sus Y-Y equivalentes correspondientes. La corriente base de línea, I_{bL} , se obtiene de la potencia base total trifásica $S_{b-3\phi}$, cuyo valor debe ser el mismo en todas partes y, de la siguiente relación:

$$3S_b = \sqrt{3}(\sqrt{3}V_b)I_b = \sqrt{3}V_{bL}I_{bL} = S_{b-3\phi} \tag{1.23}$$

1.9 INTERPRETACIÓN DE DATOS DE PLACA

A menos que se especifique explícitamente de otra manera *los datos suministrados para caracterizar un generador trifásico se refieren a los valores nominales de voltaje entre líneas V_{NL} y a la potencia aparente total trifásica $S_{N-3\phi}$* . Además, *el dato de placa para la impedancia en tanto por uno, $\hat{z}_N$, supone que se han tomado como referencia los valores nominales del aparato* [Ver (1.22)]. Es decir, cuando se reemplazan estos valores en (1.5) se obtiene la correspondiente impedancia en ohmios por fase del estrella equivalente del aparato z_g . Matemáticamente:

$$z_g = \hat{z}_N \frac{(V_{NL})^2}{S_{N-3\phi}} \tag{1.24}$$

Similarmente, la placa de un transformador trifásico contiene, entre otros datos, los siguientes: La potencia aparente nominal trifásica $S_{N-3\phi}$; la relación de transformación que se da como la de voltajes nominales entre líneas especificando la conexión (Δ

o Y) que los origina, que se designarán con V_{HL} y V_{XL} , para los lados de alta y baja tensión, respectivamente, y una impedancia en tanto por uno $\hat{z}_N$, que supone que se han tomado como referencia sus valores nominales. A partir de estos datos se puede obtener cualquiera de los circuitos equivalentes en ohmios por fase del Y-Y equivalente (ver Figura 1.2), de la siguiente manera:

$$Z_H = \hat{z}_N \frac{V_{HL}^2}{S_{N-3\phi}} \quad Z_X = \hat{z}_N \frac{V_{XL}^2}{S_{N-3\phi}} \quad (1.25)$$

En el apéndice A se demuestra que *la conexión particular de tres pares de devanados idénticos (o de tres unidades monofásicas) YA CONSTRUIDOS, no tiene incidencia en la representación en tanto por uno del Y-Y equivalente*. En consecuencia (1.25) calcula la impedancia en ohmios por fase del Y-Y equivalente independientemente de la conexión particular del transformador (Δ -Y, Y- Δ o Y-Y). Además, otra conclusión que se obtiene del apéndice A es que *un conjunto de tres transformadores monofásicos idénticos conectados para suministrar energía a una carga trifásica (banco) se puede considerar como una unidad trifásica de las siguientes características*:

- 1 Potencia aparente nominal: tres veces la de cada unidad monofásica.
- 2 Relación de transformación (la de los voltajes nominales entre líneas) se determina de acuerdo a la conexión particular de cada lado (Δ o Y) y al voltaje nominal de cada devanado.
- 3 Impedancia de dispersión o de fuga en tanto por uno $\hat{z}_N$ exactamente igual a la de cada par de devanados.

1.9.1 EJEMPLO 1.3

Dibujar el diagrama de impedancias en tanto por uno del sistema trifásico representado en la Figura 1.7, cuyos componentes se caracterizan de la siguiente manera:

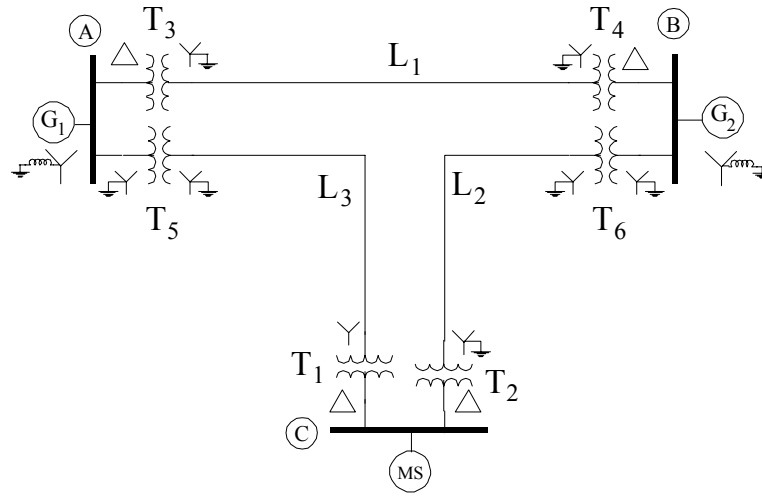


FIGURA 1.7 Diagrama unifilar del sistema ejemplo 1.3

G_1		20 MVA.	13.2 Kv.	$\hat{z}_N = j 0.15 \text{ p.u.}$
G_2		20 MVA.	14.4 Kv	$\hat{z}_N = j 0.15 \text{ p.u.}$
MS		30 MVA.	6.9 Kv	$\hat{z}_N = j 0.20 \text{ p.u.}$
T_1		15 MVA.	$6.9\Delta - 66Y \text{ kV.}$	$\hat{z}_N = j 0.08 \text{ p.u.}$
T_2	3 monofásicos	5 MVA.	$6.4 - 35.3439 \text{ kV}$	$\hat{z}_N = j 0.1 \text{ p.u.}$ c/u
$T_3 \text{ y } T_4$		20 MVA	$13.8\Delta - 138Y \text{ kV}$	$\hat{z}_N = j 0.11 \text{ p.u.}$
$T_5 \text{ y } T_6$		20 MVA	$13.2Y - 69Y \text{ kV}$	$\hat{z}_N = j 0.12 \text{ p.u.}$

$$z_{L1} = 2z_{L2} = 2z_{L3} = j 40$$

Los lados de alta tensión de todos los transformadores están conectados a las líneas de transmisión. Elegir $S_{b-3\phi} = 50 \text{ MVA}$ y $V_{bL1} = 154 \text{ kV}$ en L_1

Con este valor y de las relaciones de transformación de los transformadores se determinan los siguientes valores base de voltaje entre líneas en las distintas partes:

$$\begin{aligned}
 V_{bA} &= V_{bB} = 154 \frac{13.8}{138} = 15.4 \text{ kV} \\
 V_{bL3} &= V_{bL2} = 15.4 \frac{69}{13.2} = 80.5 \text{ kV} \\
 V_{bC} &= 80.5 \frac{6.9}{66} = 8.41591 \text{ kV}
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Reemplazando (1.26) en (1.22) se obtienen los siguientes valores base de impedancia:

$$\begin{aligned}
Z_{bL1} &= \frac{(154)^2}{50} = 474.32 \, \Omega \\
Z_{bA} &= Z_{bB} = \frac{(15.4)^2}{50} = 4.7432 \, \Omega \\
Z_{bL2} &= Z_{bL3} = \frac{(80.5)^2}{50} = 129.61 \, \Omega \\
Z_{bC} &= \frac{(8.41591)^2}{50} = 1.4166 \, \Omega
\end{aligned} \tag{1.27}$$

De (1.24) se obtienen los valores de las impedancias en ohmios por fase del Y-equivalente de los generadores y de (1.25) las de los Y-Y equivalentes de los transformadores. Nótese que para los transformadores se puede obtener un circuito equivalente con su impedancia conectada en el lado de alta tensión [Figura 1.2(a)] o en el de baja [Figura 1.2(b)], de acuerdo a cuál de las ecuaciones (1.25) se escoja. Es decir,

$$\begin{aligned}
z_{G1} &= j 0.15 \frac{(13.2)^2}{20} = j 1.3068 \, \Omega & z_{G2} &= j 0.15 \frac{(14.4)^2}{20} = j 1.5552 \, \Omega \\
z_{T1-X} &= j 0.08 \frac{(6.9)^2}{15} = j 0.25392 \, \Omega & z_{T2-X} &= j 0.1 \frac{(6.4)^2}{5} \times \frac{1}{3} = j 0.2731 \, \Omega \\
z_{T3-H} &= j 0.11 \frac{(138)^2}{20} = j 104.742 \, \Omega & z_{T4-X} &= j 0.11 \frac{(13.8)^2}{20} = j 1.04742 \, \Omega \\
z_{T5-X} &= j 0.12 \frac{(13.2)^2}{20} = j 1.04544 \, \Omega & z_{T6-H} &= j 0.12 \frac{(69)^2}{20} = j 28.566 \, \Omega \\
z_{MS} &= j 0.20 \frac{(6.9)^2}{30} = j 0.3174 \, \Omega
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Para obtener los valores en tanto por uno de la Figura 1.8 cada uno de los valores (1.28) se deben dividir por la impedancia base de (1.27) que le corresponda, de la siguiente manera:

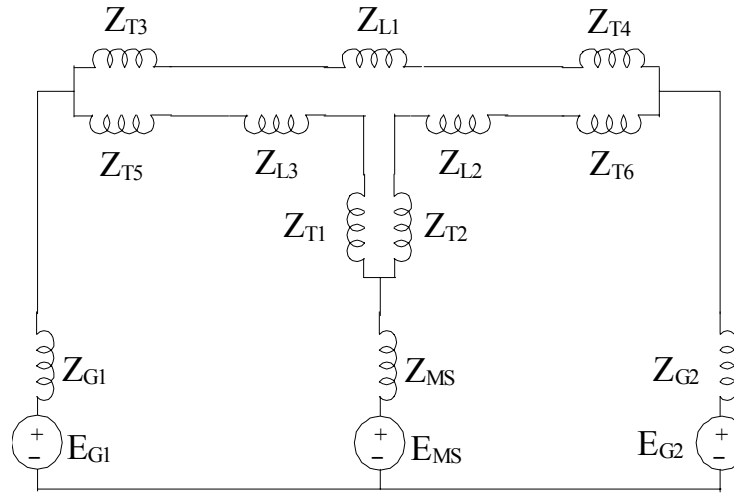


FIGURA 1.8 Diagrama de impedancias en tanto por uno del sistema ejemplo 1.3

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_{G1} &= j \frac{1.3068 \, \Omega}{4.7432 \, \Omega} = j \, 0.2755 \, p. \, u. & \hat{z}_{G2} &= j \frac{1.5552 \, \Omega}{4.7432 \, \Omega} = j \, 0.3279 \, p. \, u. \\
 \hat{z}_{T1} &= j \frac{0.25392 \, \Omega}{1.4166 \, \Omega} = j \, 0.1792 \, p. \, u. & \hat{z}_{T2} &= j \frac{0.27310 \, \Omega}{1.4166 \, \Omega} = j \, 0.1928 \, p. \, u. \\
 \hat{z}_{T3} &= j \frac{104.742 \, \Omega}{474.32 \, \Omega} = j \, 0.2208 \, p. \, u. & \hat{z}_{T4} &= j \frac{1.04742 \, \Omega}{4.7432 \, \Omega} = j \, 0.2208 \, p. \, u. \\
 \hat{z}_{T5} &= j \frac{1.04544 \, \Omega}{4.7432 \, \Omega} = j \, 0.2204 \, p. \, u. & \hat{z}_{T6} &= j \frac{28.566 \, \Omega}{129.605 \, \Omega} = j \, 0.2208 \, p. \, u. \\
 \hat{z}_{L1} &= j \frac{40 \, \Omega}{474.32 \, \Omega} = j \, 0.0843 & \hat{z}_{L2} = \hat{z}_{L3} &= j \frac{20 \, \Omega}{129.605 \, \Omega} = j \, 0.1543 \, p. \, u. \\
 \hat{z}_{MS} &= j \frac{0.3173 \, \Omega}{1.4166 \, \Omega} = j \, 0.2241 \, p. \, u. & &
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Vale la pena aclarar, una vez más, que el valor en tanto por uno de cada transformador se puede obtener también a partir del circuito equivalente en ohmios por fase alterno, siempre y cuando este valor se divida por el de impedancia base apropiado. Así por ejemplo, si para el transformador T_5 se obtuviera el circuito de la Figura 1.2(a) con su impedancia en el lado de alta y se dividiera por el de la impedancia base en la línea L_3 se obtendría el mismo valor de (1.29).

Nótese, además, que los valores(1.29) se pueden obtener directamente aplicando (1.20), que para sistemas trifásicos toma la forma

$$\hat{z}_b = \hat{z}_N \left(\frac{V_{HL}}{V_{bH}} \right)^2 \left(\frac{S_{b-3\phi}}{S_{N-3\phi}} \right) = \hat{z}_N \left(\frac{V_{XL}}{V_{bX}} \right)^2 \left(\frac{S_{b-3\phi}}{S_{N-3\phi}} \right) \quad (1.30)$$

donde V_{bX} y V_{bH} representan, respectivamente, los voltajes base entre líneas en los lados de baja y alta tensión y V_{HL} y V_{XL} los nominales de línea del transformador trifásico.

Nótese que *el producto de las relaciones de transformación de los transformadores (la de los voltajes nominales entre líneas que es la misma del Y-Y equivalente) que hacen parte de un anillo debe ser igual a la unidad* ya que, a partir del valor de voltaje base, elegido arbitrariamente en una parte del anillo, cuando éste se recorre en ambos sentidos (horario o anti-horario), se debe llegar al mismo valor de voltaje base para el punto de encuentro. Además, si esta condición no se cumpliera habría corrientes circulantes en el anillo incluso cuando el sistema opera en vacío. De otra parte la suma de desplazamientos angulares o de fase (introducidos por las conexiones) debe ser nula cuando se recorre el anillo en el mismo sentido.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] GRAINGER, Jhon D. y William D. STEVENSON, “*Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*”, McGraw-Hill, México, 1ª edición, 1995
- [2] FITZGERALD, A. E. y otros, “*Electric Machinery*”, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, 3 edición, 1971.
- [3] ELGERD, Olle I., “*Electric Energy Systems Theory: An Introduction*”, McGraw-Hill, New York, 1 edición, 1971.
- [4] WEEDY, B. M., “*Electric Power Systems*”, Wiley & Sons, New York, 2 edición, 1975.

Apéndice A

Independencia entre la Conexión del Transformador Trifásico y su Representación en tanto por uno

A.1 OBJETIVO

Demostrar que si se tienen tres transformadores monofásicos idénticos o los tres pares de devanados de una unidad trifásica, **YA CONSTRUIDOS**, *la conexión particular a que sean sometidos no tiene influencia en la representación en tanto por uno del Y-Y equivalente.*

A.2 NOTACIÓN

Sea, para cada par de devanados:

- 1 S_N su potencia aparente nominal
- 2 V_H y V_X , los voltajes nominales (de fase) de los lados de alta y baja tensión, respectivamente.
- 3 z_H y z_X las impedancias en ohmios de los circuitos equivalentes de la Figura 1.2. Recuérdese que estos valores no son independientes y que están relacionados como indica la ecuación (1.1).

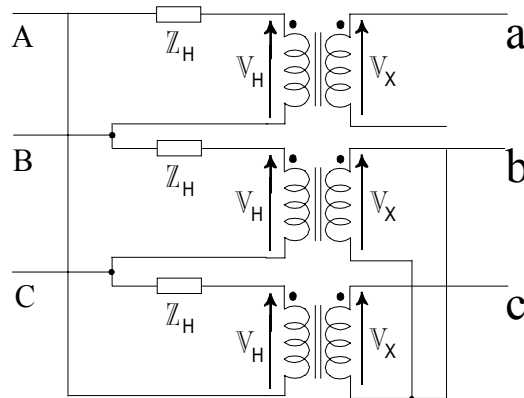


Figura A.1. Conjunto de 3 circuitos equivalentes de un transformador monofásico interconectados en un banco trifásico $\Delta - Y$

A.3 DEMOSTRACIÓN

La Figura A.1 ilustra tres circuitos equivalentes como el de la Figura 1.2 (a) para cada par de devanados con sus lados de alta conectados en Δ y sus lados de baja en Y

De la inspección de la Figura A.2, que es una reproducción o versión diferente de la misma Figura A.1, puede verse que “cuando los devanados conectados en (los 3 de alta en este ejemplo) incluyan la impedancia característica de cada par de devanados, (z_H en este caso) la impedancia en ohmios por fase del Y-Y equivalente referida a ese lado debe ser un tercio de esa misma impedancia característica”. Eligiendo arbitrariamente los valores de voltaje base entre líneas en el lado de baja, que en este caso se supone conectado en Y, y de la potencia base trifásica, e identificándolos, respectivamente, mediante V_{bLX} y $S_{b3-\phi}$, el valor del voltaje base entre líneas (y, por tanto, el de la impedancia base), en el lado de alta depende de como se conecten los devanados YA CONSTRUÍDOS en ese lado. Es decir,

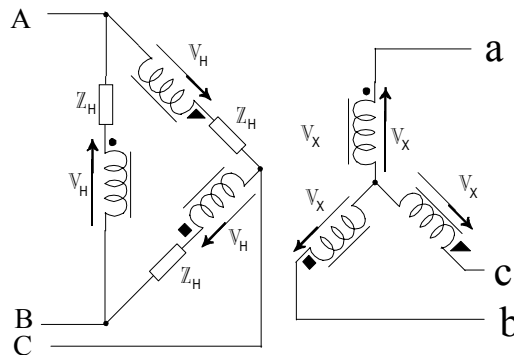


Figura A.2. Otra versión de la Figura A-1

$$\begin{aligned}
 V_{bLH-\Delta} &= V_{bLX} \frac{V_H}{\sqrt{3}V_X} && \text{conexión } \Delta \\
 V_{bLH-Y} &= V_{bLX} \frac{\sqrt{3}V_H}{\sqrt{3}V_X} && \text{conexión } Y
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Reemplazando (A.1) en (1.25) se obtiene:

$$Z_{b\Delta} = \frac{(V_{bLH\Delta})^2}{S_{b3-\phi}} = \frac{\left(\frac{V_{bLHY}}{\sqrt{3}}\right)^2}{S_{b3-\phi}} = \frac{1}{3} Z_{bY} \tag{A.2}$$

Sin pérdida de generalidad se tomarán como base los valores nominales del transformador trifásico resultante después de la interconexión (voltajes entre líneas y potencia total trifásica) [ver ecuación (1.22)], lo cual es equivalente a tomar como referencia los valores monofásicos nominales correspondientes a cada par de devanados

CASO		I	II	III	IV
CONEXIÓN	Alta	Y	Y	Δ	Δ
	Baja	Y	Δ	Y	Δ
Potencia nominal trifásica		$3S_N$	$3S_N$	$3S_N$	$3S_N$
Voltaje nominal entre líneas	Alta	$\sqrt{3}V_H$	$\sqrt{3}V_H$	V_H	V_H
	Baja	$\sqrt{3}V_X$	V_X	$\sqrt{3}V_X$	V_X
Impedancia base tomando como referencia los valores nominales	Alta	$\frac{3V_H^2}{3S_N}$	$\frac{3V_H^2}{3S_N}$	$\frac{V_H^2}{3S_N}$	$\frac{V_H^2}{3S_N}$
	Baja	$\frac{3V_X^2}{3S_N}$	$\frac{V_X^2}{3S_N}$	$\frac{3V_X^2}{3S_N}$	$\frac{V_X^2}{3S_N}$
Impedancia en ohmios por fase del Y-Y equivalente	Alta	z_H	z_H	$\frac{z_H}{3}$	$\frac{z_H}{3}$
	Baja	z_X	$\frac{z_X}{3}$	z_X	$\frac{z_X}{3}$
Impedancia en tanto por uno del Y-Y equivalente	Alta	$\frac{z_H S_N}{V_H^2}$	$\frac{z_H S_N}{V_H^2}$	$\frac{z_H S_N}{V_H^2}$	$\frac{z_H S_N}{V_H^2}$
	Baja	$\frac{z_X S_N}{V_X^2}$	$\frac{z_X S_N}{V_X^2}$	$\frac{z_X S_N}{V_X^2}$	$\frac{z_X S_N}{V_X^2}$

Tabla A.1: La representación en tanto por uno del Y-Y equivalente no depende de la conexión particular del transformador trifásico

La tabla A.1 consigna las características nominales resultantes de cada una de las 4 conexiones posibles. Tomando estos valores como referencia ($S_{b-3\phi} = 3S_N$ y Voltaje base de línea $V_{bL} = V_N$, el resultante de la conexión particular y de los voltajes nominales de cada par, V_H y V_X) se obtienen las respectivas impedancias base [ver ecuación (1.22)], que permiten obtener las correspondientes impedancias en tanto por uno, las

cuales resultan ser iguales.

Nótese que *el valor en tanto por uno del Y-Y equivalente es exactamente igual al valor nominal en tanto por uno de cada par de devanados, INDEPENDIENTEMENTE DE LA CONEXIÓN PARTICULAR*, es decir, matemáticamente

$$\hat{z}_N = \frac{z_H}{\left(\frac{V_H^2}{S_N}\right)} = \frac{z_X}{\left(\frac{V_X^2}{S_N}\right)} \quad (\text{A.3})$$

Apéndice B

IMPEDANCIA MUTUA ENTRE SISTEMAS DE DIFERENTE VOLTAJE NOMINAL

B.1 OBJETIVO

Derivar la representación en tanto por uno de la impedancia mutua entre dos sistemas de transmisión de diferente voltaje nominal, que por esta misma razón poseen diferentes valores de impedancia base [ver ecuación (1.22)].

B.2 INTRODUCCIÓN

Como se sabe, en condiciones balanceadas el campo magnético en puntos exteriores a una línea de transmisión trifásica debido a las corrientes que circulan por ella es idénticamente nulo o despreciable, lo cual es consecuencia de la ley de Ampère. Sin embargo, esta condición deja de cumplirse cuando se produce un cortocircuito asimétrico, por lo que, en este caso, es necesario el efecto de inducción mutua en líneas cercanas (típicamente, las que van montadas sobre las mismas torres compartiendo durante un trayecto “el derecho a la vía”).

B.3 DERIVACIÓN

La Figura B.1 es un diagrama unifilar que muestra dos sistemas de transmisión mutuamente acoplados conectados a la misma barra a través de sendos transformadores de diferentes relaciones de transformación, de tal manera que el voltaje nominal del circuito $p-q$, V_{H1} , es diferente al de $r-s$, V_{H2} . Designando por z_{pq} y z_{rs} las impedan-

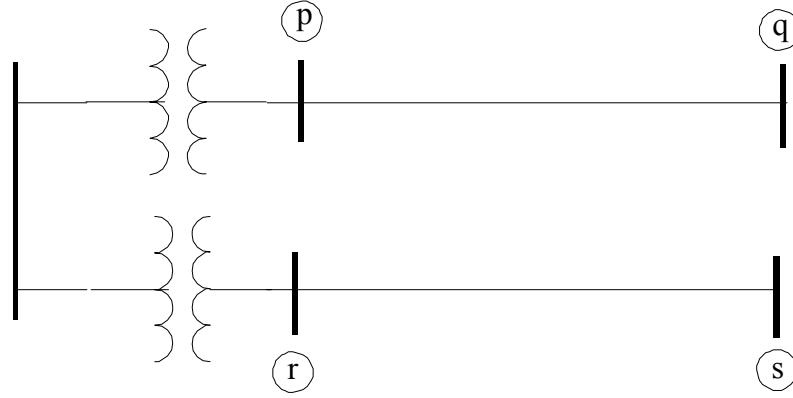


Figura B.1. Diagrama unifilar de dos líneas mutuamente acopladas de diferente voltaje nominal

cias propias y por z_M la impedancia mutua en ohmios por fase se pueden relacionar las caídas de tensión con las correspondientes corrientes a través de ellas mediante la siguiente ecuación primitiva

$$\begin{bmatrix} v_{pq} \\ v_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{pq} & z_M \\ z_M & z_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pq} \\ i_{rs} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde el orden de los subíndices para los voltajes y las corrientes indican sus sentidos de referencia (interpretación para los valores positivos). Distinguiendo con los subíndices 1 y 2 las bases del circuito $p-q$ y $r-s$, respectivamente, las ecuaciones (B.1) se pueden reescribir de la siguiente manera (multiplicando por I_{b1} la primera y por I_{b2} la segunda y dividiendo ambas por $S_b = V_{b1}I_{b1} = V_{b2}I_{b2}$):

$$\begin{aligned} \frac{v_{pq} I_{b1}}{V_{b1} I_{b1}} &= \frac{z_{pq} i_{pq} I_{b1}}{V_{b1} I_{b1}} + \frac{z_M i_{rs} I_{b1}}{V_{b2} I_{b2}} \\ \frac{v_{rs} I_{b2}}{V_{b2} I_{b2}} &= \frac{z_M i_{pq} I_{b2}}{V_{b1} I_{b1}} + \frac{z_{rs} i_{rs} I_{b2}}{V_{b2} I_{b2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Reemplazando(1.11) en (B.2) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{pq} \\ \hat{v}_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{pq} & \hat{z}_M \\ \hat{z}_M & \hat{z}_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{pq} \\ \hat{i}_{rs} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

donde se ha definido

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{pq} = \frac{v_{pq}}{V_{b1}} \\ \hat{v}_{rs} = \frac{v_{rs}}{V_{b2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{pq} = \frac{z_{pq}}{Z_{b1}} & \hat{z}_M = \frac{z_M}{\left(\frac{V_{b1} V_{b2}}{S_b}\right)} \\ \hat{z}_M = \frac{z_M}{\left(\frac{V_{b1} V_{b2}}{S_b}\right)} & \hat{z}_{rs} = \frac{z_{rs}}{Z_{b2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{pq} = \frac{i_{pq}}{I_{b1}} \\ \hat{i}_{rs} = \frac{i_{rs}}{I_{b2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Es decir, tanto los voltajes como las corrientes e impedancias propias en tanto por uno se refieren a sus propias bases, la impedancia mutua debe referirse a una base

$$z_{bM} = \frac{V_{b1} V_{b2}}{S_b} \quad (\text{B.5})$$

Apéndice C

TRANSFORMADORES DE TRES DEVANADOS POR FASE

C.1 SENTIDO DENTRO DEL CONJUNTO

Los transformadores de tres devanados por fase (monofásicos o trifásicos) se usan en aplicaciones en las que es conveniente interconectar tres circuitos independientes con voltajes nominales diferentes, las más importantes de las cuales son las siguientes:

- 1 Suministro de energía a un sistema de distribución importante (que incluya un hospital, por ejemplo, o una empresa que incurra en pérdidas cuantiosas por el corte de la energía eléctrica) a partir de dos sistemas de transmisión separados, que pueden ser de voltajes diferentes, para garantizar continuidad en el suministro (confiabilidad) en caso de que alguna de las líneas de alta tensión sufra alguna avería. Nótese que los dos circuitos de suministro no deben operar simultáneamente ya que cada uno de ellos se comporta como una fuente independiente de voltaje (barra “infinita”), lo cual entraría en conflicto en relación al voltaje resultante en el tercer devanado.
- 2 Los terceros armónicos nocivos que se presentan en los voltajes respecto al neutro en un transformador trifásico conectado en Y-Y se eliminan introduciendo un tercer devanado en cada fase y conectándolos en Δ , los cuales podrían suministrar energía a una carga local, tal como condensadores síncronos utilizados para regular el factor de potencia y, por tanto, la magnitud del voltaje.
- 3 Cuando se subdivide la carga de un sistema de distribución grande en dos partes, cada una de ellas alimentada por un grupo independiente de devanados, se pueden reducir las corrientes de cortocircuito diseñando cada devanado secundario con una reactancia de fuga mayor, lo cual disminuye el tamaño y, por tanto el costo, de los interruptores de potencia.

Aunque la interconexión de tres circuitos independientes se puede hacer mediante dos transformadores de dos devanados por fase, la alternativa del transformador de tres devanados por fase suelen ser más económica y presentar menores pérdidas.

C.2 OBJETIVOS

- I Derivar UN procedimiento para obtener el circuito equivalente del transformador de tres devanados por fase a partir de ensayos y mediciones en sus terminales accesibles.
- II Derivar expresiones para los valores de sus parámetros (impedancias) en tanto por uno (p. u.) referidos a una base común

C.3 SUPOSICIONES

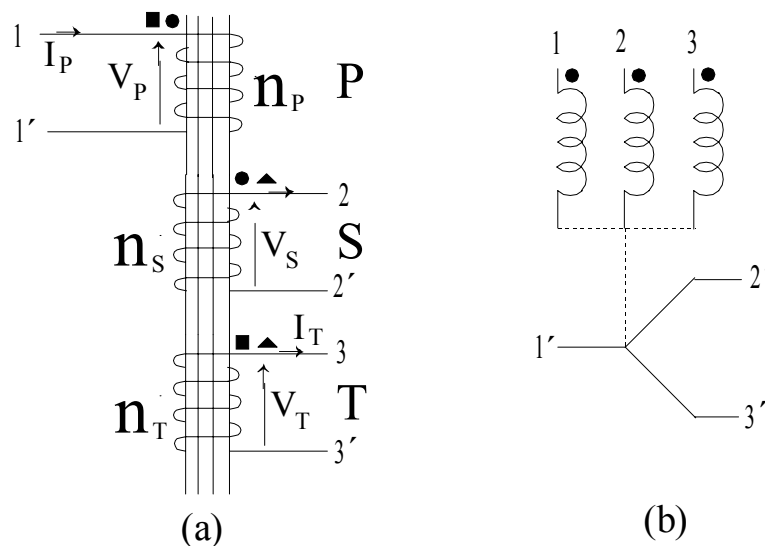


Figura C.1. Despreciar el efecto capacitivo permite interconectar los terminales de la misma polaridad relativa de un transformador tridevanado

Es importante establecer y justificar claramente las siguientes suposiciones bajo las cuales se aplica el procedimiento que se detallará más adelante:

- 1 Las capacidades de los devanados entre sí y las de cada uno de ellos con respecto a tierra

(al tanque) son despreciables. Por tanto, si se conectan a tierra todos los terminales de igual polaridad relativa las corrientes a través de ellos (que son iguales a las que circulan por los circuitos exteriores) quedan invariables [ver Figura C.1 (b)].

- 2 Los tres devanados están arrollados sobre un mismo núcleo magnético como se ilustra en la Figura C.1(a), donde se han definido los sentidos de referencia para voltajes y corrientes. Las letras P, S y T identifican los tres devanados que se denominan, respectivamente, primario, secundario y terciario y cuando se las utiliza como subíndices se refieren a cantidades asociadas con cada uno de ellos.
- 3 Se desprecia la corriente de excitación, es decir, se supone permeabilidad infinita del material magnético. Esta relación puede apreciarse aplicando la ley de Ampère a la trayectoria dentro del núcleo de la la Figura C.2

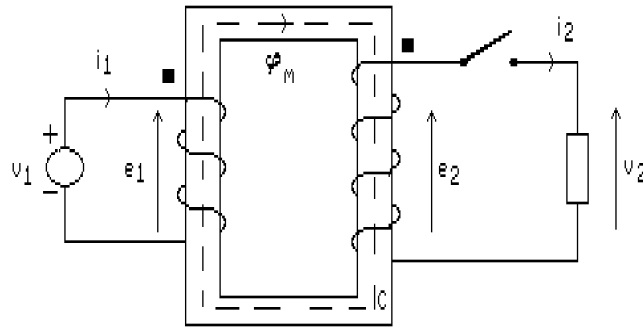


Figura C.2. Diagrama constructivo de un Transformador monofásico

$$\frac{1}{\mu} \oint B \cdot dl = \sum i = 0$$

Nótese que la suposición 2 implica que en cualquier instante el flujo magnético abrazado por cada espira (primaria, secundaria o terciaria) sería el mismo si se despreciaran las fugas magnéticas y, por tanto, se podría aplicar la ley de inducción de Faraday para deducir que las fuerzas electromotrices de los devanados están relacionadas de acuerdo al número de espiras.

Bajo las hipótesis anteriores el transformador de tres devanados se puede representar esquemáticamente por la red de la Figura C.3, donde se incluyen transformadores ideales para que no se alteren las relaciones entre voltajes y corrientes de cada par de devanados.

C.4 ENSAYOS

Para determinar los valores de Z_P , Z_S y Z_T se deben plantear las ecuaciones que resultan de simular en el circuito equivalente de la Figura C.3 las siguientes pruebas a las que se somete en la práctica el transformador:

$$\begin{aligned}
 Z_{PS} &= \left. \frac{V_P}{I_P} \right|_{V_S = I_T = 0} = Z_P + Z_S \\
 Z_{PT} &= \left. \frac{V_P}{I_P} \right|_{V_T = I_S = 0} = Z_P + Z_T \\
 Z_{ST} &= \left. \frac{V_S}{I_S} \right|_{V_T = I_P = 0} = N_1^2 (Z_S + Z_T) \quad N_1 = \frac{n_S}{n_P}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

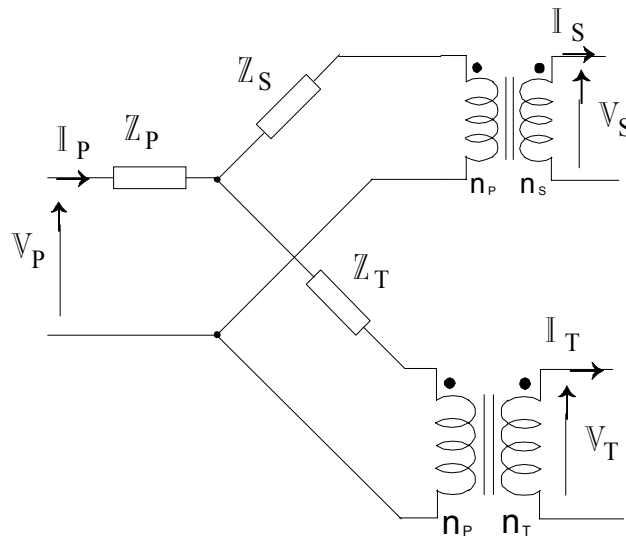


Figura C.3. Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las impedancias en el primario

Resolviendo (C.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
Z_P &= \frac{1}{2} \left(Z_{PS} + Z_{PT} - \frac{Z_{ST}}{N_1^2} \right) \\
Z_S &= \frac{1}{2} \left(Z_{PS} - Z_{PT} + \frac{Z_{ST}}{N_1^2} \right) \\
Z_T &= \frac{1}{2} \left(-Z_{PS} + Z_{PT} + \frac{Z_{ST}}{N_1^2} \right)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Dividiendo todos estos valores por la impedancia base en el primario Z_{bP} se obtienen los valores en tanto por uno correspondientes. Designando con V_{bP} y V_{bS} , los voltajes base del primario y secundario, respectivamente y por S_b la potencia base (valores que pueden ser diferentes a los nominales) se puede definir

$$\begin{aligned}
Z_{bP} &= \frac{V_{bP}^2}{S_b} & Z_{bS} &= \frac{V_{bS}^2}{S_b} \\
\hat{Z}_P &= \frac{Z_P}{Z_{bP}} & \hat{Z}_S &= \frac{Z_S}{Z_{bP}} & \hat{Z}_T &= \frac{Z_T}{Z_{bP}}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Reemplazando (C.3) en (C.1) y notando que $Z_{bS} = N_1^2 Z_{bP}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{PS}}{Z_{bP}} &= \hat{Z}_{PS} = \hat{Z}_P + \hat{Z}_S \\
\frac{Z_{PT}}{Z_{bP}} &= \hat{Z}_{PT} = \hat{Z}_P + \hat{Z}_T \\
\frac{Z_{ST}}{Z_{bS}} &= \frac{\left(\frac{Z_{ST}}{N_1^2} \right)}{Z_{bP}} = \hat{Z}_{ST} = \hat{Z}_S + \hat{Z}_T
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Resolviendo (C.4)

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_P &= \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} - \hat{Z}_{ST} \right) \\
\hat{Z}_S &= \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} - \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right) \\
\hat{Z}_T &= \frac{1}{2} \left(-\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Los resultados anteriores se pueden expresar en tanto por uno referidos a una base arbitraria. *Es posible que una cualquiera de las impedancias del circuito equivalente sea cero o negativa.*

Una alternativa de circuito equivalente en ohmios es con las impedancias ubicadas en el secundario (Ver Figura C.4). Simulando en este modelo las pruebas de corto-circuito se obtiene:

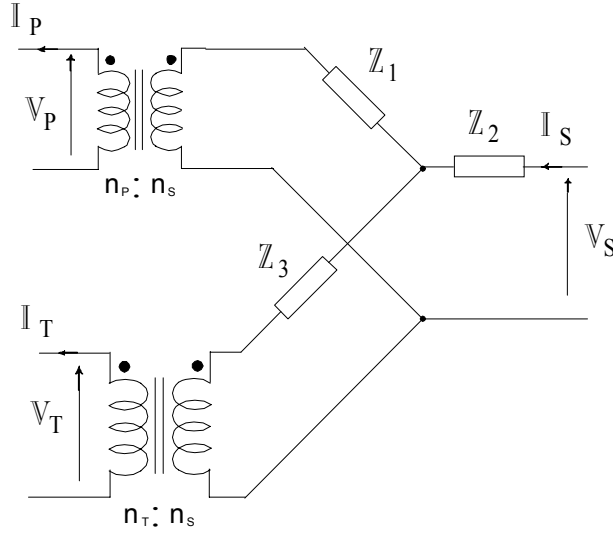


Figura C.4. Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las impedancias ubicadas en el secundario

$$\begin{aligned}
 Z_{PS} &= \frac{V_P}{I_P} \Big|_{V_S = I_T = 0} = N_2^2 (Z_1 + Z_2) & N_2 &= \frac{n_P}{n_S} \\
 Z_{PT} &= \frac{V_P}{I_P} \Big|_{V_T = I_S = 0} = N_2^2 (Z_1 + Z_3) \\
 Z_{ST} &= \frac{V_S}{I_S} \Big|_{V_T = I_P = 0} = Z_2 + Z_3
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Resolviendo (C.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{PS}}{N_2^2} + \frac{Z_{PT}}{N_2^2} - Z_{ST} \right) \\
Z_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{PS}}{N_2^2} - \frac{Z_{PT}}{N_2^2} + Z_{ST} \right) \\
Z_3 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{Z_{PS}}{N_2^2} + \frac{Z_{PT}}{N_2^2} + Z_{ST} \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Dividiendo todos estos valores por la impedancia base en el secundario Z_{bS} se obtienen los valores en tanto por uno correspondientes. Designando con V_{bP} y V_{bS} , los voltajes base del primario y secundario, respectivamente y por S_b la potencia base (valores que pueden ser diferentes a los nominales) se puede definir

$$\begin{aligned}
Z_{bP} &= \frac{V_{bP}^2}{S_b} & Z_{bS} &= \frac{V_{bS}^2}{S_b} \\
\hat{Z}_1 &= \frac{Z_1}{Z_{bS}} & \hat{Z}_2 &= \frac{Z_2}{Z_{bS}} & \hat{Z}_3 &= \frac{Z_3}{Z_{bS}}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Reemplazando (C.8) en (C.6) y notando que $Z_{bP} = N_2^2 Z_{bS}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{PS}}{N_2^2 Z_{bS}} &= \frac{Z_{PS}}{Z_{bP}} = \hat{Z}_{PS} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \\
\frac{Z_{PT}}{N_2^2 Z_{bS}} &= \frac{Z_{PT}}{Z_{bP}} = \hat{Z}_{PT} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_3 \\
\frac{Z_{ST}}{Z_{bS}} &= \hat{Z}_{ST} = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Resolviendo (C.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_P &= \hat{Z}_1 = \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} - \hat{Z}_{ST} \right) \\
\hat{Z}_S &= \hat{Z}_2 = \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} - \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right) \\
\hat{Z}_T &= \hat{Z}_3 = \frac{1}{2} \left(-\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Una tercera alternativa de circuito equivalente en ohmios es con las impedancias ubi-

cadascuna en el terciario (Ver Figura C.5). Simulando en este modelo las pruebas de cortocircuito se obtiene:

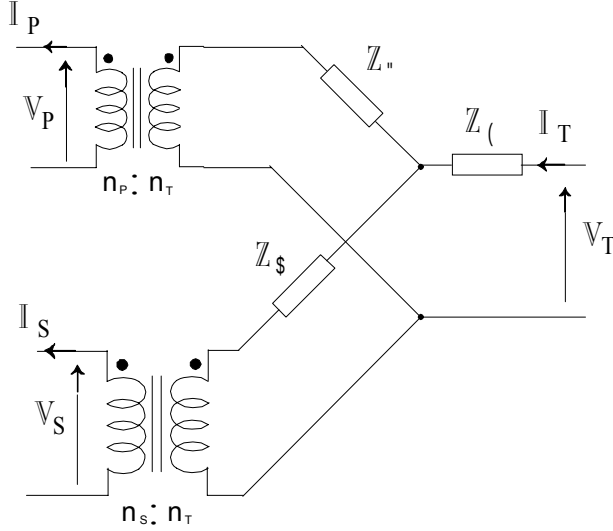


Figura C.5. Circuito equivalente del transformador de tres devanados con las impedancias ubicadas en el terciario

$$\begin{aligned}
 Z_{PS} &= \frac{V_P}{I_P} \big|_{V_S = I_T = 0} = N_3^2 (Z_\alpha + Z_\beta) & N_3 &= \frac{n_P}{n_T} \\
 Z_{PT} &= \frac{V_P}{I_P} \big|_{V_T = I_S = 0} = N_3^2 (Z_\alpha + Z_\gamma) \\
 Z_{ST} &= \frac{V_S}{I_S} \big|_{V_T = I_P = 0} = N_4^2 (Z_\beta + Z_\gamma) & N_4 &= \frac{n_S}{n_T}
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Resolviendo (C.11) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{PS}}{N_3^2} + \frac{Z_{PT}}{N_3^2} - \frac{Z_{ST}}{N_4^2} \right) \\
 Z_\beta &= \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{PS}}{N_3^2} - \frac{Z_{PT}}{N_3^2} + \frac{Z_{ST}}{N_4^2} \right) \\
 Z_\gamma &= \frac{1}{2} \left(-\frac{Z_{PS}}{N_3^2} + \frac{Z_{PT}}{N_3^2} + \frac{Z_{ST}}{N_4^2} \right)
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

Dividiendo todos estos valores por la impedancia base en el terciario Z_{bT} se obtienen los

valores en tanto por uno correspondientes. Designando con V_{bP} , V_{bS} y V_{bT} los voltajes base del primario, secundario y del terciario, respectivamente y por S_b la potencia base (valores que pueden ser diferentes a los nominales) se puede definir

$$\begin{aligned} Z_{bP} &= \frac{V_{bP}^2}{S_b} & Z_{bS} &= \frac{V_{bS}^2}{S_b} & Z_{bT} &= \frac{V_{bT}^2}{S_b} \\ \hat{Z}_\alpha &= \frac{Z_\alpha}{Z_{bT}} & \hat{Z}_\beta &= \frac{Z_\beta}{Z_{bT}} & \hat{Z}_\gamma &= \frac{Z_\gamma}{Z_{bT}} \end{aligned} \quad (C.13)$$

Reemplazando (C.13) en (C.11) y notando que $Z_{bP} = N_3^2 Z_{bT}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{Z_{PS}}{N_3^2 Z_{bT}} &= \frac{Z_{PS}}{Z_{bP}} = \hat{Z}_{PS} = \hat{Z}_\alpha + \hat{Z}_\beta \\ \frac{Z_{PT}}{N_3^2 Z_{bT}} &= \frac{Z_{PT}}{Z_{bP}} = \hat{Z}_{PT} = \hat{Z}_\alpha + \hat{Z}_\gamma \\ \frac{Z_{ST}}{N_4^2 Z_{bT}} &= \frac{Z_{ST}}{Z_{bS}} = \hat{Z}_{ST} = \hat{Z}_\beta + \hat{Z}_\gamma \end{aligned} \quad (C.14)$$

Resolviendo (C.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_P &= \hat{Z}_1 = Z_\alpha = \frac{1}{2} (\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} - \hat{Z}_{ST}) \\ \hat{Z}_S &= \hat{Z}_2 = Z_\beta = \frac{1}{2} (\hat{Z}_{PS} - \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST}) \\ \hat{Z}_T &= \hat{Z}_3 = Z_\gamma = \frac{1}{2} (-\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST}) \end{aligned} \quad (C.15)$$

C.5 EJEMPLO 1

Obtener el circuito equivalente de un transformador de potencia monofásico de tres circuitos cuyas características nominales son las de la tabla C.1. Tomar como referencia los valores nominales del primario.

Nótese que las potencias aparentes nominales no guardan necesariamente una relación de suma aritmética ya que ellas dependen del calibre de los devanados. Esta circunstancia permite una mayor versatilidad en las condiciones de operación a que puede ser sometido el transformador. Sin embargo, bajo cualquier circunstancia se debe sa-

Devanado	Capacidad (kVA)	Voltaje (Voltios)
Primario P	10,000	63,500
Secundario S	6,667	11,000
Terciario T	5,000	7,580

Tabla C.1: Datos de placa del transformador del ejemplo 1

tisfacer la ecuación de equilibrio de potencias. Es decir,

$$\pm V_P I_P \pm V_S I_S \pm V_T I_T = 0$$

Aplicando voltaje reducido a uno de los devanados hasta que por otro corto- circuitado circule su corriente nominal, dejando el tercero abierto, se hicieron las mediciones de la tabla C.2

Ensayo	I	II	III
Devanado Corto-circuitado	S	T	T
Devanado excitado con fuente de voltaje	P	P	S
Voltaje V (Voltios)	4,490	5,800	588
Potencia P (Vatios)	46,100	35,800	35,000

Tabla C.2: Resultados de los ensayos experimentales o pruebas de corto-circuito aplicadas al transformador de ejemplo 1

SOLUCIÓN:

Valores nominales de corriente:

$$\begin{aligned}
 I_{NP} &= \left(\frac{10,000 \times 10^3}{63,500} \right) = 157.48 \text{ A.} \\
 I_{NS} &= \left(\frac{6,667 \times 10^3}{11,000} \right) = 606.09 \text{ A.} \\
 I_{NT} &= \left(\frac{5,000 \times 10^3}{7,580} \right) = 659.63 \text{ A.}
 \end{aligned}
 \tag{C.16}$$

La corriente a través del devanado excitado se calcula de la relación entre corrientes y voltajes para un transformador de dos devanados, teniendo en cuenta que por uno de los dos (el corto-circuitado en este caso) circula la corriente nominal. Es decir,

La tabla C.4 resume los resultados obtenidos hasta ahora y el algoritmo o método de procesarlos para obtener las impedancias de los ensayos de corto circuito.

Ensayo	Corriente
I	$I_P = 606.09 \left(\frac{11,000}{63,500} \right) = 104.99 \text{ A.}$
II	$I_P = 659.63 \left(\frac{7,580}{63,500} \right) = 78.74 \text{ A.}$
III	$I_S = 659.63 \left(\frac{7,580}{11,000} \right) = 454.55 \text{ A.}$

Tabla C.3: Cálculo de corrientes a través del devanado excitado

De (C.5) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_P &= \hat{Z}_1 = Z_\alpha = \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} - \hat{Z}_{ST} \right) = 0.00534621 + j0.0908388 \text{ p. u.} \\
 \hat{Z}_S &= \hat{Z}_2 = Z_\beta = \frac{1}{2} \left(\hat{Z}_{PS} - \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right) = 0.00502616 + j0.01471563 \text{ p. u.} \\
 \hat{Z}_T &= \hat{Z}_3 = Z_\gamma = \frac{1}{2} \left(-\hat{Z}_{PS} + \hat{Z}_{PT} + \hat{Z}_{ST} \right) = 0.00897384 + j0.0912761 \text{ p. u.}
 \end{aligned}
 \tag{C.17}$$

TRANSFORMADORES TRIFASICOS

Los criterios y resultados del apéndice A se pueden extender al caso de transformadores de tres devanados por fase. Es decir, la conexión particular de tres conjuntos idénticos de devanados, cada uno de los cuales incluye un primario, un secundario y un terciario, no tiene influencia en la representación en tanto por uno del Y-Y-Y equivalente. Además cuando se trata de unidades trifásicas se acostumbra:

- 1 Excitar simultáneamente (aplicar voltaje reducido a) los tres devanados del mismo voltaje nominal, independientemente de su conexión particular, y medir:
 - a los voltajes entre líneas resultante;
 - b la corriente de línea resultante y
 - c la potencia total trifásica.
- 2 Corto-circuitar simultáneamente otros tres devanados del mismo voltaje nominal y dejar abiertos los tres idénticos restantes.

De cada una de las **tres únicas pruebas de cortocircuito independientes que pueden**

42 Apéndice C TRANSFORMADORES DE TRES DEVANADOS POR FASE

Ensayo	I	II	III
Devanado Corto-circuitado	S	T	T
Devanado excitado	P	P	S
Voltaje V (Voltios)	4,490	5,800	588
Potencia P (Vatios)	46,100	35,800	35,000
Corriente en el devanado. excitado I (A)	104.9869	78.7402	454.5454
Resistencia (Ω) $R = \frac{P}{I^2}$	4.1824	5.7742	0.1694
Magnitud de Impedancia (Ω) $Z = \frac{V}{I}$	42.7672	73.6599	1.2936
Reactancia de fuga $X = \sqrt{Z^2 - R^2}$	42.5622	73.4333	1.2825
Designación $R + jX$	Z_{PS}	Z_{PT}	Z_{ST}
Impedancia en tanto por uno (C.4)	$0.0104 + j0.1056$	$0.0143 + j0.1821$	$0.0140 + j0.1060$

Tabla C.4: Impedancias de las pruebas de corto-circuito del ejemplo 1

efectuarse experimentalmente, (es decir, Z_{PS} o Z_{SP} , Z_{PT} o Z_{TP} y Z_{ST} o Z_{TS}) se obtienen los datos que corresponderían a uno de los conjuntos de devanados (los que van abrazados a la misma columna en un transformador de este tipo), *tres de los cuales conforman la unidad trifásica* y se obtiene, para cada uno de ellos, un circuito equivalente en ohmios como el de la figura C.3, C.4 o C.5, con las impedancias en ohmios ubicadas en uno cualquiera de los devanados. Nótese que la relación de transformación debe ser consistente con los datos de voltajes nominales entre líneas de la unidad trifásica y con la conexión Δ o Y . Si las impedancias están colocadas en un lado conectado en Δ se deben dividir por 3 y *modificar las relaciones de transformación para que coincidan con las de voltajes nominales entre líneas* y así obtener un circuito equivalente monofásico del Y-Y-Y equivalente.

EJEMPLO 2 Un transformador trifásico de tres arrollamientos por fase tiene las características no-minales de la tabla C.5

Devanado	Capacidad (MVA)	Voltaje (Voltios)	Conexión
Primario P	30	63,500	Δ
Secundario S	20	11,000	Δ
Terciario T	15	$\sqrt{3} \times 7,580$	Y

Tabla C.5: Datos de placa nominales del transformador trifásico del ejemplo 2

Hallar un circuito equivalente en ohmios del - equivalente como el de la Figura C.4 y definir las relaciones de transformación.

Aplicando voltaje reducido a uno de los devanados cuando se corto-circuita otro hasta que por *uno de ellos (el excitado o el corto-circuitado)* circule su corriente nominal, dejando el tercero abierto, se hicieron las mediciones de la tabla C.6

Nótese que las características nominales de un transformador monofásico con tres de

Ensayo	I	II	III
Devanado Corto-circuitado	P	P	T
Devanado excitado con fuente de voltaje	S	T	S
Voltaje de línea V_L (Voltios)	777.794354	692.346159	588
Corriente nominal de línea I_L en el devanado	S	T	T
Potencia activa total trifásica P (Vatios)	138,298	107,400	105,000

Tabla C.6: Resultados de los ensayos experimentales o pruebas de corto-circuito aplicadas al transformador del ejemplo 2

los cuales se puede formar el transformador trifásico descrito en la tabla C.5 coincide, en este caso, con las del transformador del ejemplo 1 (ver tabla C.1).

CORRIENTES NOMINALES: De la ecuación $S_{3\phi} = \sqrt{3}V_L I_L$ con los datos suministrados en la tabla C.5 se calculan las corrientes nominales de línea. Cuando el devanado está conectado en Δ , se debe dividir ésta por $\sqrt{3}$ para obtener la de fase. La tabla C.7 resume los resultados que se obtienen aplicando estos criterios

Devanado	Primario	Secundario	Terciario
Identificación	P	S	T
Potencia aparente nominal total trifásica $S_{3\phi}$ (MVA)	30	20	15
Voltaje nominal entre líneas V_L (kV)	63.5	11	$\sqrt{3} \times 7.58$
Corriente nominal de línea I_L (A) $I_L = \frac{S_{3\phi}}{\sqrt{3} \times V_L}$	272.7639	1049.7278	659.6306
Conexión	Δ	Δ	Y
Corriente nominal de fase	157.4803	606.0606	659.6306

Tabla C.7: Cálculo de corrientes nominales monofásicas y de línea del transformador trifásico del ejemplo 2

En la tabla C.8 se muestra el algoritmo para obtener las impedancias que se obtendrían si los ensayos se hicieran a un conjunto de devanados abrazados a la misma columna, es decir, a un primario, un secundario y un terciario a partir de los datos de la tabla C.6

Análogamente a como cuando se derivó el circuito de la Figura C.4, se pueden plantear entonces, en este caso, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 Z_{SP} &= \left. \frac{V_S}{I_S} \right|_{V_P=I_T=0} = Z_2 + Z_1 = 0.1255 + j1.2775 \\
 Z_{TP} &= \left. \frac{V_T}{I_T} \right|_{V_P=I_S=0} = N^2 (Z_3 + Z_1) = N^2 (0.0823 + j1.0471) \\
 Z_{ST} &= \left. \frac{V_S}{I_S} \right|_{V_T=I_P=0} = Z_2 + Z_3 = 0.1694 + j1.2824 \quad N = \left(\frac{n_T}{n_S} \right) = \frac{7.58}{11}
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

44 Apéndice C TRANSFORMADORES DE TRES DEVANADOS POR FASE

Ensayo	I	II	III
Devanado Corto-circuitado	P	P	T
Devanado excitado	S	T	S
Voltaje V (Voltios)	777.794354	692.346159	588
Potencia P (Vatios)	46,099.43	35,800.11	35,000
Corriente nominal en	S	T	T
Corriente en el devanado. excitado I (A)	606.0606	659.6306	454.5454
Resistencia (Ω) $R = \frac{P}{I^2}$	0.125506	0.082278	0.1694
Magnitud de Impedancia (Ω) $Z = \frac{V}{I}$	1.283361	1.049597	1.2936
Reactancia de fuga $X = \sqrt{Z^2 - R^2}$	1.277209	1.046367	1.2825
Designación $R + jX$	Z_{PS}	Z_{PT}	Z_{ST}

Tabla C.8: Impedancias correspondientes a las pruebas de corto-circuito para un conjunto de devanados abrazados a la misma columna

Resolviendo (C.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \frac{1}{2} \left(Z_{SP} + \frac{Z_{TP}}{N^2} - Z_{ST} \right) \\
 Z_2 &= \frac{1}{2} \left(Z_{SP} - \frac{Z_{TP}}{N^2} + Z_{ST} \right) \\
 Z_3 &= \frac{1}{2} \left(-Z_{SP} + \frac{Z_{TP}}{N^2} + Z_{ST} \right)
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Puesto que los devanados del secundario están conectados en Δ estas impedancias deben dividirse por 3 para obtener el circuito equivalente en ohmios del transformador monofásico tres de los cuales conectados en Y-Y-Y equivalen al especificado en la tabla C.5.

Como es lógico suponer las relaciones de transformación de un Y-Y-Y equivalente como el de la Figura C.4 serían exactamente iguales a las de voltajes nominales entre líneas (ver tabla C.5), las cuales pueden ser diferentes, y en este caso lo son, a las de voltajes nominales de fase de un conjunto de tres devanados con tres de los cuales se puede formar el transformador descrito en el ejemplo 2 (ver tabla C.1). Es decir en la figura C.4 se tendría los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 0.021563 + j 0.366383 \, \Omega & \frac{n_P}{n_S} &= \frac{63.5}{11} \\
Z_2 &= 0.0202722 + j 0.059353 \, \Omega & \frac{n_P}{n_T} &= \frac{63.5}{7.58\sqrt{3}} \\
Z_3 &= 0.036194 + j 0.368147 \, \Omega & \frac{n_T}{n_S} &= \frac{7.58\sqrt{3}}{11}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Nótese, además, que a los resultados de la ecuación (C.20) se hubieran podido llegar directamente obteniendo, a partir de (C.17) y de los valores base (es decir, los nominales del primario), un circuito equivalente en ohmios con las impedancias ubicadas en el primario como el de la Figura C.3 y teniendo en cuenta que

$$Z_P = \left(\frac{n_P}{n_S}\right)^2 Z_1 \quad Z_S = \left(\frac{n_P}{n_S}\right)^2 Z_2 \quad Z_T = \left(\frac{n_P}{n_S}\right)^2 Z_3 \tag{C.21}$$

donde Z_1 , Z_2 y Z_3 son tomados de (C.20) Es decir, fácilmente se puede verificar que

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \left(\frac{11}{63.5}\right)^2 \hat{Z}_P \frac{(63.5)^2}{10} \\
Z_2 &= \left(\frac{11}{63.5}\right)^2 \hat{Z}_S \frac{(63.5)^2}{10} \\
Z_3 &= \left(\frac{11}{63.5}\right)^2 \hat{Z}_T \frac{(63.5)^2}{10}
\end{aligned} \tag{C.22}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] WHESTINGHOUSE, Electric Corporation, “*Electrical Transmission and Distribution Reference Book*”, East Pittsburg, Pennsylvania, 1964, 4ª edición.
- [2] MASSACHUSETTS, Institute Of Technology (Electrical Engineering Of), “*Circuitos Magnéticos y transformadores*”, Editorial Reverté, 1965, Barcelona.

- [3] ACOSTA M., Alvaro, “*Representación de Sistemas Eléctricos de Potencia*”, Universidad Tecnológica de Pereira, Marzo de 1994.

Capítulo 2

CONSIDERACIONES OPERACIONALES

2.1 OBJETIVOS

- I Discutir algunos factores que afectan el cumplimiento de los objetivos de un sistema eléctrico de potencia
- II Estudiar los fenómenos más importantes que se presentan en un sistema eléctrico de potencia cuando a partir de unas condiciones de balance y simetría se presentan pequeñas perturbaciones

2.2 EL CONCEPTO DE POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA

2.2.1 TRANSMISIÓN MONOFÁSICA

La Figura 2.1 muestra un sistema elemental de transmisión de energía que opera en régimen sinusoidal permanente. Sea

$$\begin{aligned}v(t) &= V_m \text{Sen}(\omega t) \\ i(t) &= I_m \text{Sen}(\omega t - \phi)\end{aligned}$$

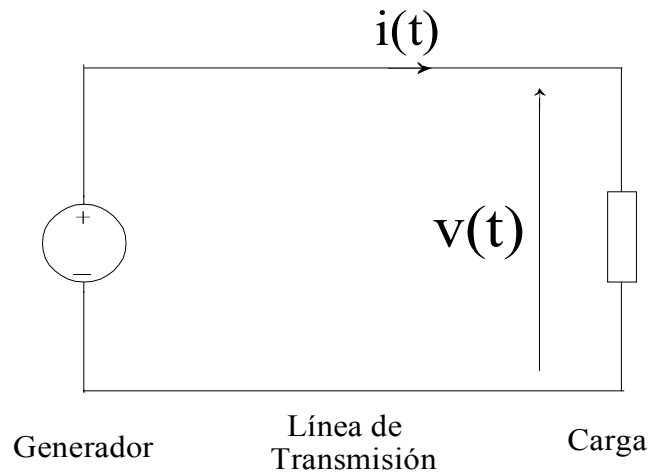


Figura 2.1. Sistema elemental de transmisión de energía

el voltaje en la carga³ y la corriente en el circuito, respectivamente. Fácilmente se puede demostrar que la *potencia instantánea* absorbida por la carga viene dada por la siguiente expresión:

$$p(t) = v(t) * i(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi) - \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \phi) \quad (2.1)$$

donde puede verse que oscila a una frecuencia $2\omega t$ alrededor de un valor promedio $\frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi)$ y donde $p(t) < 0$ indica que en dichos instantes el flujo de energía es alejándose de la carga

Introduciendo los *valores efectivos* de corriente y voltaje definidos por la ecuación

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

³ Se define una carga como un aparato o conjunto de ellos que absorben energía de la red.

(2.1) se puede reescribir, después de un desarrollo trigonométrico, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + q_r(t) \\ \text{donde } p_a(t) &= VI \cos(\phi) [1 - \cos(2\omega t)] \\ q_r(t) &= -VI \sin(\phi) \sin(2\omega t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

y se mantienen las definiciones (2.2)

Nótese que la potencia instantánea se ha descompuesto en dos componentes identificadas en (2.4) por las marcas $p_a(t)$ y $q_r(t)$. La primera **nunca es negativa** y tiene un *valor promedio* $VI \cos(\phi)$ y toma el nombre de *potencia activa instantánea*. A la segunda se le denomina *potencia reactiva instantánea*, tiene un *valor promedio nulo* y su **valor máximo** es $VI \sin(\phi)$.

Introduciendo estas definiciones (2.4) toma la forma:

$$\begin{aligned} p(t) &= P[1 - \cos(2\omega t)] - Q \sin(2\omega t) \\ \text{donde } P &= VI \cos(\phi) \text{ y } Q = VI \sin(\phi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

se denominan *potencia real* y *potencia reactiva*, respectivamente

Se pueden hacer los siguientes comentarios

- 1 **La potencia real** P se define como *el valor promedio de $p_a(t)$ y, por lo tanto, físicamente significa la potencia convertida en trabajo útil en la carga (transmitida). Su magnitud depende del factor de potencia en la carga ϕ*
- 2 **La potencia reactiva** Q es por definición *el valor máximo de aquella componente que viaja hacia adelante y hacia atrás a través del sistema de transmisión sin producir trabajo útil en la carga ya que tiene un valor promedio nulo*
- 3 Puesto que la mayoría de las cargas de un sistema de potencia son de naturaleza inductiva se ha adoptado la convención de que ellas absorben o consumen potencia reactiva ($Q > 0$)
- 4 de (2.5) se puede concluir que *la corriente a través de los conductores de un sistema de transmisión, y por tanto, las pérdidas en éste, dependen de las características de la carga a la que suministra energía y principalmente del ángulo de fase de su impedancia*

ϕ^4 , lo que a su vez se apoya en las siguientes consideraciones

- a Los aparatos que requieren de energía eléctrica para su funcionamiento se fabrican para que operen a unos valores de voltaje normalizados mundialmente (110, 220, por ejemplo) Es decir, V puede considerarse constante. Una vez construido un aparato eléctrico el *porcentaje de la energía que absorbe que se transforma en trabajo útil* $\{[Cos(\phi)]$ es constante
 - b El uso particular es el que define el valor de la potencia real P . Así, por ejemplo, para un ascensor el número de pasajeros, el peso promedio de la cabina y la velocidad que se requiere determina la potencia necesaria. Es
 - c decir P es una constante que depende de la aplicación particular
- 5 Cuando el factor de potencia de la carga $Cos(\phi)$ es muy pequeño las pérdidas de transmisión son excesivas y se produce sobrecalentamiento en los cables y posiblemente en el generador, razón por la cual las compañías suministradoras de energía suelen exigir un factor de potencia mínimo a cada usuario. Para resolver este problema se acostumbra conectar en paralelo con la carga otra reactiva (generalmente capacitiva).

2.2.2 EJERCICIO

Considere un circuito R - L excitado por una fuente de voltaje $v(t) = V_m Sen(\omega t)$. Demostrar que la derivada temporal de la energía almacenada en el campo magnético W_M del inductor viene dada por

$$\frac{d}{dt}W_M = Q Sen[2(\omega t - \phi)]$$

2.2.3 TRANSMISIÓN TRIFÁSICA

La Figura 2.2 muestra un sistema de potencia trifásico que opera bajo condiciones balanceadas donde

⁴ Cuando los parámetros R , L , C y/o M de los circuitos equivalentes de las cargas se desconocen, se acostumbra caracterizarlas mediante la potencia activa P y el factor de potencia $Cos(\phi)$ cuando operan en régimen sinusoidal permanente a voltaje, corriente y frecuencia nominales, también especificados en la placa de datos,

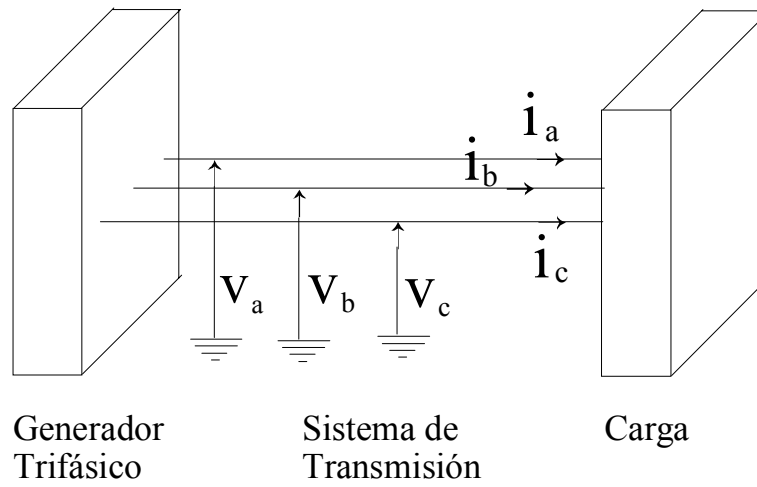


Figura 2.2. Sistema de potencia trifásico

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= V_m \text{Sen}(wt) & i_a(t) &= I_m \text{Sen}(wt - \phi) \\
 v_b(t) &= V_m \text{Sen}(wt - 120^\circ) & i_b(t) &= I_m \text{Sen}(wt - 120^\circ - \phi) \\
 v_c(t) &= V_m \text{Sen}(wt + 120^\circ) & i_c(t) &= I_m \text{Sen}(wt + 120^\circ - \phi)
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Fácilmente se puede verificar que la potencia total trifásica transmitida a través del sistema de transmisión es

$$P_{3\phi}(t) = v_a(t) i_a(t) + v_b(t) i_b(t) + v_c(t) i_c(t) = 3VI \cos(\phi) \quad (2.7)$$

Se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1 No se requiere neutro de retorno por cuanto $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$
- 2 $v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0$
- 3 El voltaje de un sistema trifásico se refiere invariablemente al voltaje entre líneas V_L . y la relación entre éste y el de fase-neutro o línea-tierra V se expresa mediante la siguiente ecuación⁵

⁵ Tanto el neutro como la tierra están al mismo potencial bajo condiciones de equilibrio y simetría

$$V_L = \sqrt{3}V$$

- 1 Existe la tentación de suponer que, puesto que la potencia instantánea transmitida a través de un sistema trifásico es constante, la potencia reactiva no es importante. Sin embargo, la potencia en cada fase tiene las mismas características que en el caso de transmisión monofásica.
- 2 Aunque el concepto de potencia trifásica reactiva tiene poco sentido se acostumbra referirse a ella de acuerdo a la ecuación:

$$Q_{3\phi} = 3Q_{1\phi} = 3VI \operatorname{Sen}(\phi) = \sqrt{3}V_L I \operatorname{Sen}(\phi)$$

- 3 Dada la completa simetría entre las fases es suficiente determinar la corriente, el voltaje y la potencia en una sola de ellas denominada de referencia.

2.2.4 EL CONCEPTO DE POTENCIA COMPLEJA

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} P &= VI \operatorname{Cos}(\phi) & Q &= VI \operatorname{Sen}(\phi) \\ e^{j\phi} &= \operatorname{Cos}(\phi) + j \operatorname{Sen}(\phi) \end{aligned}$$

sugieren la posibilidad de definir la potencia como una cantidad compleja no rotatoria de la siguiente manera:

$$\mathbf{S} = VI e^{j\phi} = VI \angle\phi = VI [\operatorname{Cos}(\phi) + j \operatorname{Sen}(\phi)] = P + jQ$$

Sea $\mathbf{V} = V e^{j\phi_v}$ $\mathbf{I} = I e^{j\phi_i}$ $\mathbf{V}^* = V e^{-j\phi_v}$ $\mathbf{I}^* = I e^{-j\phi_i}$. Entonces

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = P + jQ$$

El valor absoluto de $\mathbf{S}$ se denomina *potencia aparente* y se denota por $S = |\mathbf{S}|$. Con

esta notación

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = P + jQ = \mathbf{Z} |\mathbf{I}|^2 = \mathbf{Y}^* |\mathbf{V}|^2$$

donde $\mathbf{Z}$ es la impedancia monofásica y el inverso de la admitancia $\mathbf{Y}$.

2.3 OBJETIVOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA

Suministrar energía eléctrica a varias cargas en un área de servicio dada. Apropriadamente diseñado y operado debe cumplir los siguientes requerimientos:

- 1 La energía suministrada debe ser en la cantidad y lugar que sus usuarios lo demanden
- 2 A pesar de su naturaleza variable con el tiempo, debe satisfacer tanto la demanda de potencia activa como de reactiva
- 3 La energía debe acogerse a las siguientes especificaciones mínimas de calidad
 - a Frecuencia constante. Muchos procesos industriales utilizan temporizaciones que parten de la base de que la frecuencia de la red es constante. Fue un error adoptar políticas de ahorro de energía o de disminución de pérdidas con base en variar la frecuencia.
 - b Voltaje constante. El consumo de energía y de aparatos que la requieren se ha vuelto masivo con base en la normalización a nivel mundial tanto del voltaje como de la frecuencia
 - c Confiabilidad alta, es decir, la empresa suministradora debe garantizar a los usuarios la mayor continuidad en el servicio
- 4 Los costos económicos y ecológicos deben ser mínimos

Este capítulo examina aquellos factores que afectan estos objetivos

2.4 ESTRUCTURA

La determina principalmente el tamaño del sistema eléctrico de potencia. Aunque no hay reglas generales aplicables, es posible encontrar algunas semejanzas ya que todos ellos tienen una cosa en común: *operan a varios niveles de voltaje separados por*

transformadores

2.4.1 SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN

Suministran energía a usuarios domésticos e industriales y comerciales medios. Se distinguen dos niveles de voltaje:

- 1 Primario: Desde 13.200 kV. hasta 66 kV.
- 2 Secundario: 120/240 V.

2.4.2 SISTEMA DE SUBTRANSMISIÓN

Distribuyen energía a un número de subestaciones de distribución y a grandes industrias a niveles de voltaje que típicamente varían entre 33 y 115 kV.. En sus funciones es similar al sistema de distribución, excepto que cubre un área geográficamente más grande y entrega mayores cantidades de energía a niveles de voltaje más altos. Cuando se incrementa la densidad de carga es más económico usar voltajes más elevados. Así los circuitos de transmisión de ayer se convierten en los de subtransmisión de mañana

2.4.3 SISTEMA DE TRANSMISIÓN

Se diferencia de las anteriores en:

- 1 En su *operación*: Mientras los sistemas de distribución y subtransmisión extraen energía de una sola fuente y la transmiten a cargas individuales, el sistema de transmisión interconecta todas las estaciones de generación y los grandes centros de demanda. Generalmente la energía puede ser enrutada en cualquier dirección que se desee para lograr la operación más económica de todo el sistema o con propósitos técnicos
- 2 En su *estructura*. En contraste con los sistemas de distribución y subtransmisión que tienen estructura *radial* que a su vez es la solución obvia cuando el flujo de energía tiene una dirección predominante, los sistemas de transmisión típicamente se caracterizan por su estructura en *anillo* para permitir control del sentido del flujo de energía.

Este curso tratará de algunos de los problemas relacionados con el control y enrutamiento de los grandes bloques de energía que se mueven a este nivel tanto en operación normal de estado estacionario como bajo condiciones anormales o de falla.

2.5 CARACTERÍSTICAS DE LAS CARGAS

El término *carga* se refiere a un aparato o conjunto de ellos que absorben energía del sistema. Se pueden distinguir varias categorías de aparatos: electrónicos, equipos de alumbrado y calefacción y motores. Existen diferencias entre ellos en cuanto a

- 1 tamaño
- 2 Simetría (monofásica o trifásica)
- 3 Variación de la energía consumida con respecto al tiempo, a la frecuencia y al voltaje.
- 4 Ciclo de trabajo (uso regular o aleatorio).

Las cargas se pueden clasificar en industriales y domésticas. Una diferencia importante entre ellas es la alta proporción de motores de inducción en las primeras (aproximadamente 60%). La carga industrial tiene en general ciclos de trabajo predecibles y su demanda puede considerarse esencialmente constante. Las cargas afectan el diseño y operación técnica de los sistemas.

Se pueden resumir las siguientes reglas que caracterizan cargas típicas de un sistema:

- 1 Se pueden reconocer patrones promedios de variación con el tiempo de la carga conectada a transformadores de distribución. Al nivel de subtransmisión y transmisión se alcanza una situación casi predecible.
- 2 Las variaciones de carga con el tiempo son relativamente lentas. De minuto a minuto se tiene una carga casi constante. Un minuto es un período largo comparado con las constantes de tiempo eléctricas del sistema y esto permite considerarlo como operando en estado estacionario
- 3 Una carga típica siempre consume potencia reactiva
- 4 Una carga típica es siempre simétrica. En el caso de cargas monofásicas la simetría se obtiene distribuyéndolas intencionalmente entre las fases.

2.5.1 DEPENDENCIA DEL VOLTAJE Y LA FRECUENCIA

En ciertos estudios de sistemas es necesario conocer de que manera las cargas varían con el voltaje y la frecuencia. Estas relaciones pueden encontrarse analíticamente para *las que se pueden representar mediante una impedancia*. Para el caso de un circuito $R - L$, por ejemplo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{R|V|^2}{R^2 + (2\pi fL)^2} \\
 Q &= \frac{(2\pi fL)RV^2}{R^2 + (2\pi fL)^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Nótese que tanto P como Q son directamente proporcionales al cuadrado de la magnitud del voltaje.

Una composición típica de una carga promedio de una subestación es la siguiente:

- 1 Motores de inducción 60\%
- 2 Motores sincrónicos 20\%
- 3 Otros ingredientes (pérdidas, alumbrado, etc) 20\%

Las cargas compuestas que constituyen las de mayor interés también varían con el voltaje y la frecuencia y su comportamiento se puede describir por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
 P &= P(f, |V|) \\
 Q &= Q(f, |V|)
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Sin embargo no se pueden obtener expresiones analíticas en ese caso. En la mayoría de situaciones prácticas se necesita conocer solamente los cambios en las potencias activa y reactiva ΔP y ΔQ causados por pequeñas variaciones en la frecuencia y el voltaje Δf y $\Delta |V|$

De la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= \frac{\partial P}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial P}{\partial |V|} \Delta |V| \\
 \Delta Q &= \frac{\partial Q}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial Q}{\partial |V|} \Delta |V|
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Las 4 derivadas parciales que aparecen en la ecuación (2.10) juegan el papel de parámetros que describen el comportamiento de la carga en las proximidades del voltaje y frecuencia nominales. Para cargas compuestas se encuentran empíricamente. Así, por

ejemplo, para la carga promedio típica descrita previamente se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial |V|} \simeq 1 \frac{p.u.}{p.u.} \quad \frac{\partial Q}{\partial |V|} \simeq 1.3 \frac{p.u.}{p.u.} \quad \frac{\partial P}{\partial f} \simeq 1 \frac{p.u.}{p.u.}$$

Se observa que la demanda de la carga compuesta: a) depende menos del voltaje que las cargas tipo impedancia y b) se incrementan con la frecuencia debido al predominio de motores

2.6 EL BALANCE DE LA POTENCIA REAL Y SU EFECTO EN LA FRECUENCIA DEL SISTEMA

Para describir el fenómeno de las transferencias de energía en un sistema eléctrico de potencia bajo condiciones normales de operación y establecer la relación entre la frecuencia y el balance de potencia activa (la rapidez con la que se genera y aquella con la cual se absorbe (como pérdidas de los componentes o se transforma en trabajo útil), es conveniente precisar algunas definiciones básicas.

Se define carga como un aparato que absorbe energía electromagnética del sistema y la convierten en una capacidad de realizar un trabajo útil, tales como mecánica (motor), calórica (calentador, horno, etc), o lumínica.

Similarmente el generador es un dispositivo capaz de convertir otras formas de energía en electromagnética.

También es conveniente recordar que potencia es la rapidez con la que la energía se transforma

Bajo condiciones normales de operación los generadores giran sincrónicamente y juntos generan la potencia que en cada momento demandan las cargas más las pérdidas de transmisión. Estas últimas, que constituyen un bajo porcentaje de la potencia total, se deben, entre otros, al efecto corona en las líneas de transmisión, al efecto Joule o de calentamiento en el cobre de los componentes y a las corrientes de Foucault inducidas en los núcleos magnéticos de los transformadores y generadores que contribuyen a su calentamiento.

Vale la pena recordar un análisis exacto de la transformación, almacenamiento y distribución de la energía debe hacerse mediante la teoría electromagnética que se apoya en las Ecuaciones de Maxwell que se formulan conjuntamente con las siguientes suposiciones:

- 1 La densidad de energía en un punto de un campo eléctrico de magnitud E es

$$u_E = \frac{\epsilon |E|^2}{2}$$

- 2 La densidad de energía en un punto de un campo magnético en el cual su magnitud es B es:

$$u_B = \frac{|B|^2}{2\mu} = \frac{\mu |H|^2}{2}$$

donde $B = \mu H$ y H se denomina intensidad de campo magnético.

- 3 La energía eléctrica se transforma en calor con una rapidez $\frac{|E|^2}{\rho}$ por unidad de volumen por segundo en un punto en el que la magnitud de la intensidad de campo eléctrico es E , donde ρ es una característica del medio denominada su *resistividad* y puede variar de un punto a otro⁶.

Es decir, *la energía se almacena en la inmediata vecindad de los aparatos y viaja a través del espacio a la velocidad de la luz.*

Puesto que *la energía reactiva* es aquella componente que viaja hacia adelante y hacia atrás a través de los sistemas de transmisión sin producir trabajo útil en la carga y tiene un valor promedio nulo *no se tiene en cuenta en esta discusión.*

Las anteriores consideraciones nos llevan a postular el equilibrio de potencia activa bajo condiciones de operación normales, es decir, la rapidez de producción de energía debe ser igual a aquella con la que se consume en las cargas y se transforma en calor de pérdidas en los componentes del sistema. Expresado matemáticamente

$$\sum P_G = \sum P_D + \sum P_L \quad (2.11)$$

⁶ Una región del espacio en la que a cada punto se asocia una cantidad física (función de la posición) se denomina *campo*. Cuando ésta es un vector fuerza (como en el caso del campo eléctrico y el magnético) se supone que en el espacio se almacena la energía. La cantidad de energía infinitesimal ΔW almacenada en un elemento infinitesimal de volumen ΔV también cambia con la posición y en el límite se vuelve una propiedad puntual definida mediante la ecuación

$$u(x, y, z, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

donde los subíndices $()_G$, $()_D$, $()_L$ significan generación, demanda y pérdidas, respectivamente.

2.6.1 FUNDAMENTOS BÁSICOS DE FUNCIONAMIENTO DEL GENERADOR SÍNCRONO.

El movimiento relativo entre un campo magnético exterior y un conductor induce en éste una corriente si está cerrado o una fuerza electromotriz entre sus extremos si no lo está (Ley de Faraday). El sentido de las corrientes inducidas se determina de acuerdo con la ley de Lenz y es tal que las fuerzas que ejerce el campo magnético exterior sobre los conductores que llevan la corriente inducida, crean un torque (electromagnético) que se opone al aplicado exteriormente para producir el desplazamiento de los conductores (mecánico). Si ambos torques son iguales en magnitud se obtiene un equilibrio dinámico: velocidad angular constante

El control de la potencia real generada se obtiene mediante el torque mecánico. Así por ejemplo, controlando la apertura de las válvulas de vapor (central térmica), o las compuertas de agua (hidráulica).

Si se aumenta el torque mecánico a partir de una condición de equilibrio, y suponiendo que el campo magnético exterior permanece constante, se incrementa la velocidad de rotación de los conductores los cuales cortan mayor cantidad de líneas de fuerza de campo magnético en la unidad de tiempo lo que produce un aumento de la corriente inducida, cuya interacción con el campo magnético constante aumenta el torque electromagnético y se restablece el equilibrio dinámico. Esta capacidad natural de mantener un equilibrio entre el torque mecánico y el electromagnético permite un comportamiento de velocidad aproximadamente constante independientemente de las condiciones de carga, característica de la cual toma su nombre de “**síncronico**”. Además, puesto que la fuerza electromotriz inducida es proporcional al producto de la velocidad por el campo exterior y éste permanece constante, **se puede suponer el generador sincrónico como fuente ideal de voltaje**. Una consecuencia de esta consideración es que si se parte de una condición de equilibrio dinámico, **cuando se desconecta carga se disminuye el torque electromagnético y viceversa**. Por tanto, si el torque mecánico permaneciera constante y ocurriera un cambio significativo en la carga, se restablecería el equilibrio dinámico a una velocidad diferente a la nominal: mayor para una desconexión y menor para un aumento de carga. Bajo estas nuevas circunstancias se sigue cumpliendo la ley de la conservación de la energía: los aparatos que continúan conectados cambian la cantidad de energía que absorben por unidad de tiempo, ya que ésta es función de la velocidad del generador (frecuencia) y de la magnitud del voltaje (ver ecuación (2.9))

Se recuerda que la frecuencia viene dada por la expresión

$$f = \frac{np}{60} \quad (2.12)$$

donde n es la velocidad angular en revoluciones por minuto (rpm) y p el número de *pares* de polos.

De la anterior discusión se puede concluir que **laa frecuencia y el equilibrio de potencia activa están estrechamente relacionadas entre sí.**

La forma ideal de operar el sistema sería instruir a los operarios para que ajusten todas las compuertas de agua y las válvulas de vapor a valores que correspondan exactamente a las demandas para obtener que se satisfaga (2.11) con velocidad y frecuencia constante igual a la nominal. Sin embargo, la demanda varía estocásticamente con el tiempo y solo puede ser predicha dentro de ciertos límites. Por lo tanto, siempre habrá un pequeño exceso o defecto de generación lo que causará fluctuaciones en la frecuencia.

2.6.2 PERTURBACIONES BALANCEADAS EN EL SISTEMA

Considere lo que sucedería cuando en un sistema, operando a frecuencia nominal (constante prefijada de antemano: 60 ciclos por segundo, por ejemplo) en condiciones de perfecto equilibrio y simetría, se produce un cambio pequeño pero brusco en la demanda (desconexión). Puesto que las válvulas de gas o las compuertas de agua ignoran la perturbación el torque mecánico permanece constante. La disminución en la corriente a través de los generadores (que se distribuye entre todos ellos) haría decrecer los torques electromagnéticos y se produciría un predominio del torque mecánico y un consecuente incremento en la velocidad y, por tanto, en la frecuencia con una rapidez que depende del momento de inercia total del sistema. Las velocidades de los motores conectados al sistema aumentarían y encontrarían mayores torques en la carga mecánica que arrastran lo cual requeriría extraer más energía de la red. Para que la frecuencia retorne a sus valor nominal de 60 ciclos por segundo se requiere un ajuste (disminución) en el torque mecánico, es decir en la apertura de las compuertas de agua o en las válvulas que regulan el paso del vapor de agua.

La relación entre frecuencia y las variaciones en la demanda de potencia activa constituye uno de los fenómenos más importantes en sistemas eléctricos de potencia. Para mantener el balance entre la potencia activa generada y demandada, a pesar de las variaciones de ésta con el tiempo, los controladores de velocidad de los generadores detectan desviaciones de la frecuencia con respecto a su valor de referencia o nominal para ordenar la acción correspondiente (aumento o disminución de torque mecánico) hasta

recuperar el valor de operación normal de 60 ciclos por segundo. Ya que la frecuencia es un indicador sensitivo del balance de la potencia activa en el sistema es conveniente usarla en un sistema de control para obtenerlo automáticamente.

2.7 EFECTO DE LA POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA EN LA MAGNITUD Y ÁNGULO DE FASE DEL VOLTAJE EN SISTEMAS ELÉCTRICOS

2.7.1 RESUMEN

Se estudia la influencia de cambios en los flujos de potencia activa y reactiva tanto en las magnitudes como en los ángulos de fase de los voltajes en sistemas eléctricos de potencia.

2.7.2 INTRODUCCIÓN

Los fabricantes garantizan una larga vida útil de los aparatos eléctricos si la magnitud del voltaje aplicado se mantiene dentro de un rango muy estrecho alrededor de sus valores nominales, los cuales se han normalizado en todo el mundo para estimular el consumo masivo de dichos dispositivos. Por esta razón el operador de un sistema eléctrico de potencia debe poner especial atención al control de la magnitud del voltaje.

2.7.3 NOTACIÓN

Si C es un complejo se puede expresar en forma rectangular o polar de la siguiente manera:

$$C = A + jB = |C| e^{j\delta} \quad |C| = C$$

donde A y B son, respectivamente la parte real e imaginaria de C y $|C|$ y δ son la magnitud y el argumento de C , respectivamente, y se relacionan de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$|C| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan(\delta) = \frac{B}{A}$$

Similarmente C^* denota el conjugado de C y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C^* &= A - jB = |C| e^{-j\delta} \\ A &= \operatorname{Re}\{C\} \quad B = \operatorname{Im}\{C\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.7.4 EXPRESIONES BÁSICAS

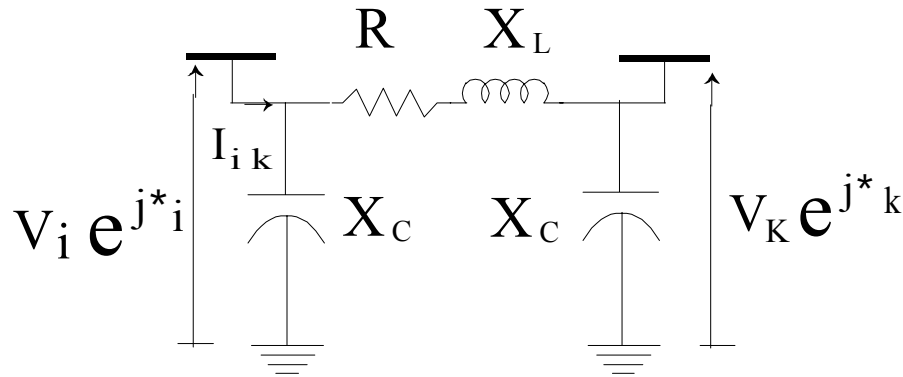


Figura 2.3. Circuito equivalente monofásico de un sistema de transmisión de longitud media

La Figura 2.3 muestra el modelo de circuito de una línea de transmisión media. Las cantidades asociadas a ella se designan de la siguiente manera:

Resistencia	R	
Reactancia inductiva	X_L	
Reactancia capacitiva paralelo	X_C	
Voltaje en el envío	$V_i = V_1 e^{j\delta_i}$	(2.14)
Voltaje en el recibo	$V_k = V_k e^{j\delta_k}$	

La corriente y la potencia compleja medidas en el envío $I_{i k}$ y $S_{i k}$, respectivamente se relacionan entre sí de acuerdo a las ecuaciones conocidas en la teoría de circuitos

$$I_{i k} = \frac{V_i - V_k}{R + jX_L} + \frac{V_i}{-jX_C} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{S}_{ik} = P_{ik} + jQ_{ik} = \mathbf{V}_i \mathbf{I}_{ik}^* \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.15) en (2.16) teniendo en cuenta (2.13) y (2.14) se pueden obtener expresiones para la potencia activa y reactiva enviada a través de la línea

$$\begin{aligned} P_{ik} &= \frac{1}{R^2 + X_L^2} [RV_i^2 - V_i V_k (R \cos \delta - X_L \sin \delta)] \\ Q_{ik} &= \frac{1}{R^2 + X_L^2} [X_L V_i^2 - V_i V_k (X_L \cos \delta + R \sin \delta)] - \frac{V_i^2}{X_C} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde

$$\delta = \delta_i - \delta_k \quad (2.18)$$

Puesto que en (2.16) la corriente se ha definido en el sentido de la caída de potencial, (2.17) expresa la potencia activa y reactiva “absorbida” por la caja negra a la derecha del nodo de envío, las cuales son cantidades **algebraicas** (pueden tomar valores positivos o negativos para unas condiciones dadas) independientemente de las condiciones de generación y/o de demanda y del número de sistemas de transmisión conectados (incidentes) tanto en el envío como en el recibo del sistema de transmisión. Así, por ejemplo, si el nodo k estuviera conectado a otras líneas de transmisión y a un generador y alimentara una carga se satisfaría la 1ª ley de Kirchhoff que en términos fasoriales toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{Gk} - \mathbf{I}_{Dk} &= \sum_j \mathbf{I}_{kj} & \mathbf{I}_{Gk}^* - \mathbf{I}_{Dk}^* &= \sum_j \mathbf{I}_{kj}^* \\ \mathbf{V}_k \left(\mathbf{I}_{Gk}^* - \mathbf{I}_{Dk}^* - \sum_j \mathbf{I}_{kj}^* \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es decir, *en cada nodo se debe satisfacer el equilibrio de potencias*

Si en (2.17) se intercambian los subíndices i y k se obtienen expresiones para la potencia “enviada” desde el recibo

$$\begin{aligned}
P_{ki} &= \frac{1}{R^2 + X_L^2} [RV_k^2 - V_i V_k (R \cos \delta + X_L \sin \delta)] \\
Q_{ki} &= \frac{1}{R^2 + X_L^2} [X_L V_k^2 - V_i V_k (X_L \cos \delta - R \sin \delta)] - \frac{V_k^2}{X_C} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Así, por ejemplo, reemplazando los siguientes parámetros y condiciones de operación de un sistema de transmisión

$$\begin{aligned}
R &= 15.75 \, \Omega & X_L &= 58.5 \, \Omega & X_C &= 4920 \, \Omega \\
V_i &= 132 \, kV. & V_k &= 110 \, kV. & \delta &= 7^\circ
\end{aligned}$$

en (2.17) y en (2.20) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{ik} &= 41.1303 \, Mw. & Q_{ik} &= 36.8762 \, Mvar. \\
P_{ki} &= -38.1244 \, Mw. & Q_{ki} &= -31.7125 \, Mvar.
\end{aligned}$$

Nótese entonces que tanto P_{ik} (P_{ki}) como Q_{ik} (Q_{ki}) son valores algebraicos y que sus signos se puede interpretar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P_{ik} &> 0 && \text{se está enviando energía desde el nodo } i \\
P_{ik} &< 0 && \text{se está recibiendo energía en el nodo } i
\end{aligned}$$

Los anteriores resultados indican que la línea entrega en el nodo k una parte de la potencia enviada a través de ella desde el nodo i que la suma *algebraica* de las potencias que “salen” de ambos nodos es una medida de las pérdidas en el sistema de transmisión y son función de las magnitudes del voltaje en ambos extremos y de la diferencia en sus ángulos de fase. Es decir,

$$\begin{aligned}
P_L(V_i, V_k, \delta) &= P_{ik} + P_{ki} \\
Q_L(V_i, V_k, \delta) &= Q_{ik} + Q_{ki} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

La Figura 2.4 muestra el diagrama unifilar de un sistema eléctrico de potencia de dos nodos consistente en una línea de transmisión cuyos extremos se han conectado a un generador y a una carga, respectivamente. Cuando se suponen conocidos los parámetros del sistema R , X_L y X_C , la magnitud del voltaje en el generador V_i se mantiene



Figura 2.4. Diagrama unifilar de un sistema de transmisión típico

constante y en el recibo se conecta una demanda $\mathbf{S}_{Dk} = P_D + jQ_D$ el voltaje en la carga se puede obtener resolviendo (2.20) teniendo en cuenta que en este caso (no hay generador ni otras líneas conectadas en k)

$$P_{ki} = -P_D \quad Q_{ki} = -Q_D \quad (2.22)$$

y considerando como incógnitas V_k y δ

Combinando (2.20) y (2.22) y despreciando la admitancia paralelo del circuito equivalente por fase ($X_C = \infty$) se obtiene

$$\begin{aligned} P_D &= V_k V_i (g \cos \delta + b \sin \delta) \\ Q_D &= -b V_k^2 + V_k V_i (b \cos \delta - g \sin \delta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde se ha definido

$$g - jb = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}$$

En sistemas de transmisión de alto voltaje es típico que $R \ll X_L$ y por tanto $g \ll b$. Por lo tanto, (2.23) toma la forma (suponiendo R despreciable)

$$\begin{aligned} P_D &= V_k V_i b \sin \delta \\ Q_D &= -b V_k^2 + V_k V_i b \cos \delta \end{aligned} \quad (2.24)$$

las cuales permiten estudiar el efecto de cambios pequeños tanto en la demanda de po-

tencia activa como reactiva en la magnitud del voltaje en el recibo V_k y en la diferencia de fase de los voltajes δ , de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_D \\ \Delta Q_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_D}{\partial \delta} & \frac{\partial P_D}{\partial V_k} \\ \frac{\partial Q_D}{\partial \delta} & \frac{\partial Q_D}{\partial V_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_D}{\partial \delta} = V_k V_i b \cos \delta & \frac{\partial P_D}{\partial V_k} = V_i b \sin \delta \\ \frac{\partial Q_D}{\partial \delta} = -V_k V_i b \sin \delta & \frac{\partial Q_D}{\partial V_k} = -2bV_k + V_i b \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Reemplazando (2.26) en (2.25) e invirtiendo se obtiene: $V_k V_i b \sin \delta$

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V_k \end{bmatrix} = \frac{1}{F} \begin{bmatrix} -2bV_k + V_i b \cos \delta & -V_i b \sin \delta \\ V_k V_i b \sin \delta & V_k V_i b \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_D \\ \Delta Q_D \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde

$$F = V_k V_i b^2 (V_i - 2V_k \cos \delta)$$

2.7.5 CONCLUSIONES

Puesto que en sistemas de potencia los valores de δ son muy pequeños y en este rango $\sin \delta \ll \cos \delta$ se concluye entonces que:

- 1 δ responde principalmente a cambios en la potencia activa, de donde dicha variable toma su nombre de “ángulo de potencia”.
- 2 Similarmente, las magnitudes de los voltajes son “sensitivos” fundamentalmente a cambios en la potencia reactiva.

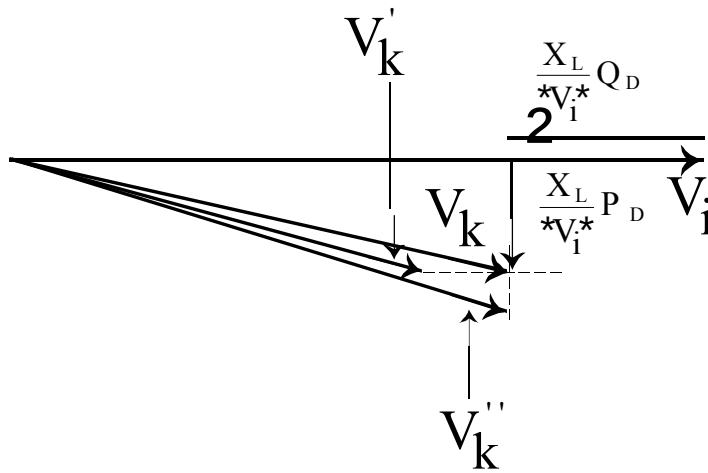


Figura 2.5. Diagrama fasorial para ilustrar la influencia de la potencia reactiva en la magnitud del voltaje

La anterior discusión sugiere que la potencia activa y reactiva generadas podrían clasificarse como las *variables de control* en un sistema eléctrico de potencia.

Las ecuaciones (2.17) y (2.20) permiten concluir que si se conocen los ángulos de fase y las magnitudes de los voltajes se puede obtener una radiografía de los flujos de potencia en el sistema, razón por la cual a dichas cantidades se les conoce como *variables de estado*.

Un método alternativo para establecer la relación entre la potencia reactiva y la magnitud del voltaje es mediante el diagrama fasorial de la Figura 2.5 en el que se han hecho las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}
 R &= 0 \therefore P_{ik} = P_D \\
 Q_{ik} &\approx Q_D \\
 \mathbf{V}_i &= V_i \angle 0^\circ \\
 \mathbf{V}_k &= V_k \angle -\delta > 0^\circ
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

que corresponden a una carga inductiva. Combinando (2.15) y (2.16) y reemplazando (2.28) se obtiene

$$\frac{P_D - jQ_D}{V_i \angle 0^\circ} = \frac{V_i \angle 0^\circ - \mathbf{V}_k}{jX_L}$$

$$\mathbf{V}_k = \left(V_i - \frac{X_L}{V_i} Q_D \right) - j \frac{X_L}{V_i} P_D = e + j f \quad (2.29)$$

De (2.29) se deduce que la componente real del voltaje en el recibo depende de la potencia reactiva y que la potencia activa afecta su parte imaginaria. Si se tiene en cuenta que en sistemas eléctricos de potencia:

- 1) La diferencia de fase entre los voltajes es muy pequeño, es decir (ver ecuación (2.29))
- 2) La regulación $\frac{V_i - V_k}{V_i} * 100\% \leq 10\%$ y que $V_k = \sqrt{e^2 + f^2}$ se puede concluir que:
 - a *Un cambio en la componente real debido a uno correspondiente en la potencia reactiva se refleja en un cambio significativo en la magnitud del voltaje.* En la Figura 3 puede notarse que $V'_k \neq V_k$
 - b *Similarmente, una variación de la potencia activa que afecta únicamente la parte imaginaria tiene poca influencia en V_k .* En la Figura 2.5 se observa que $V''_k \approx V_k$

Se puede concluir entonces que para mantener constante la magnitud del voltaje en un nodo es necesario instalar en él una fuente de potencia reactiva para que la línea no tenga que transportarla y las variaciones en la demanda sean satisfechas por dicha fuente local.

2.8 ESTABILIDAD

Suponiendo que las magnitudes de los voltajes en ambos extremos permanecen constantes y despreciando las pérdidas reales en la línea ($R = 0$) fácilmente se puede verificar que (2.17) toma la forma

$$P_{ik} = \frac{V_i V_k}{X_L} \text{Sen } \delta$$

donde $(P_{ik})_{\max} = \frac{V_i V_k}{X_L}$ se denomina *límite de estabilidad estático*. Es decir, existe

un límite para la potencia activa que se puede transmitir a través de cada sistema de transmisión. En la medida en que cambia la potencia demandada ($\Delta P_D > 0$) en el recibo aumenta el ángulo δ hasta un límite $\delta = 90^\circ$ más allá del cual la potencia enviada desde el envío disminuye aumentando el desbalance entre la potencia activa generada y demandada. En este caso el generador nunca recupera la frecuencia nominal y su sistema de control después de un cierto tiempo toma la decisión de desconectarlo de la red ante la evidencia de que algo muy grave está ocurriendo. La pérdida inicial de uno de los generadores acentúa aún más el problema y del balance de la potencia activa y disminuye las probabilidades de que el conjunto de los restantes recuperen la frecuencia nominal y sobreviene la pérdida de un segundo generador, produciéndose una reacción en cadena que da origen a los famosos apagones en un área extensa.

2.9 CUESTIONES DE SEGURIDAD, COSTO Y CONFIABILIDAD

La seguridad en un sistema tiene que ver con problemas tales como la escogencia de los niveles de aislamiento y de los esquemas de protección más apropiados, los cuales deben operar cuando se presenten condiciones anormales y deben reunir las siguientes características:

- 1 Selectividad. Es decir, debe aislar la mínima parte del sistema en donde se encuentra la falla. Lo anterior para mantener la continuidad en el servicio en la mayor área posible y para no incurrir en pérdidas por la energía que dejaría de venderse innecesariamente.
- 2 Rapidez. Es decir, para minimizar los daños causados, se requiere una velocidad de respuesta alta.
- 3 Confiabilidad. Es decir, que operen cuando se presenten las circunstancias. Es costumbre tener equipo de respaldo para el caso en que los sistemas de protección llamados a hacerlo no operen.

Para satisfacer un conjunto dado de demandas de energía ubicadas en diferentes localizaciones geográficas más las pérdidas, existe un número infinito de maneras de distribuir la generación requerida entre los generadores. Este hecho plantea el problema de encontrar la alternativa óptima desde el punto de vista económico, ya que, en cada estación, el costo de generación de cada Megavatio depende de la cantidad de Mw generados, es decir, cada generador tiene su correspondiente curva de costos.

La continuidad en el servicio exige tomar decisiones respecto a posibles inversiones para garantizar una baja probabilidad de interrupción del mismo. La desconexión de

un centro de demanda grande cuando existe suficiente capacidad de generación puede representar pérdidas enormes, no solo para la compañía, sino también para los usuarios

BIBLIOGRAFÍA

- [1] CHEN, Mo Shing, “Reactive Power Analysis and Control”, Energy Systems Research Center, University of Texas, Arlington, Tx, 79019.
- [2] ELGERD, Olle I., Electric Energy Systems Theory: An Introduction”, McGraw-Hill, New York, 1971

Capítulo 3

ANÁLISIS DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA BAJO CONDICIONES DE EQUILIBRIO Y SIMETRÍA

3.1 OBJETIVOS

- I Plantear el conjunto de ecuaciones no lineales linealmente independientes que describa completamente el comportamiento del sistema eléctrico de potencia bajo condiciones de equilibrio de las cargas y simetría de la red.
- II Justificar métodos sistemáticos adaptados a la programación en computadoras digitales para construir matrices en función de las cuales se describe completamente el comportamiento del sistema, que además, sean flexibles, es decir, que permitan investigar los efectos de cambios en la configuración y los valores de los parámetros con esfuerzos computacionales mínimos.
- III Describir los fundamentos matemáticos de los métodos iterativos más difundidos en la literatura para resolverlas y derivar los algoritmos para el problema de flujos de potencia en la red.

3.2 FORMULACIÓN CIRCUITAL

Lo primero en cualquier análisis de un sistema de energía eléctrica es la formulación de un modelo de circuito apropiado, que relacione un conjunto seleccionado de voltajes

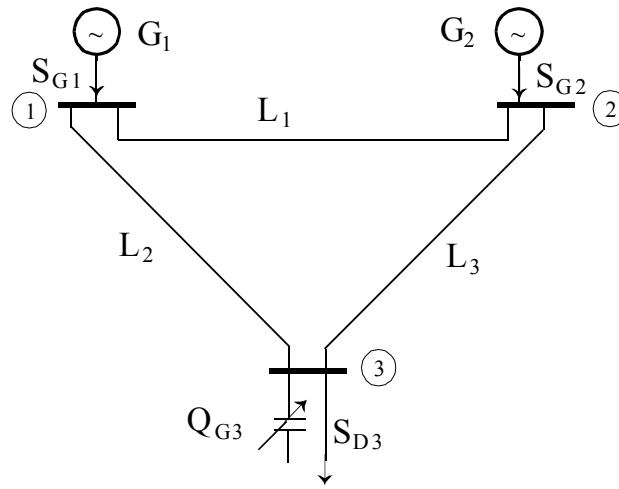


Figura 3.1. Sistema de Potencia de 3 barras interconectadas en anillo

con otro escogido de corrientes. Las redes con las cuales se trabaja contienen a menudo centenas, tal vez miles, de elementos de circuitos individuales y cuando estos son interconectados para simular el sistema entero es necesario realizar decenas de miles de operaciones algebraicas elementales.

El sistema de 3 barras mostrado en la figura 3.1, servirá para este propósito. Se trata del más simple para el cual las líneas puedan formar una trayectoria cerrada y que contiene los elementos más esenciales que se encuentran en sistemas más grandes, a saber: Barras de generación, de carga y mixtas, así como fuentes controladas de potencia reactiva.

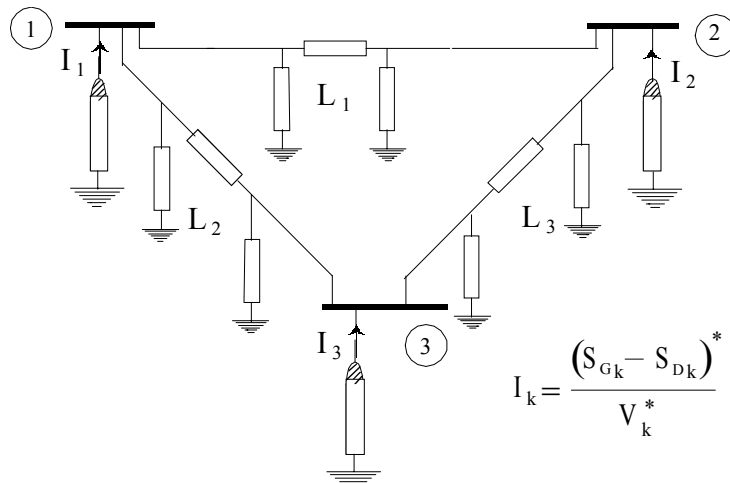


Figura 3.2. Circuito equivalente del sistema de potencia de la Figura 3.1

En la Figura 3.2 las líneas se han representado por sus π equivalentes. Se deja como ejercicio demostrar que en el caso en que haya transformadores en ambos extremos de la línea, se puede encontrar un π equivalente para el conjunto (sugerencia: utilizar la transformación de impedancias $Y - \Delta$ y $\Delta - Y$). Cada barra k se alimenta de unidades generadoras que inyectan potencia S_{Gk} ; S_{Dk} es la potencia demandada de (o conectada) a la k -ésima barra. En el análisis de sistemas de potencia *es conveniente concentrar generación y demanda en una potencia neta generada de barra S_k* , la cual queda entonces definida por la ecuación:

$$S_k = S_{Gk} - S_{Dk} \quad (3.1)$$

La corriente inyectada en la i -ésima barra se obtiene entonces de la expresión

$$I_k = \frac{S_k^*}{V_k^*} \quad (3.2)$$

El circuito equivalente de la Figura 3.2 se puede re-dibujar como el de la figura 3.3 después de reemplazar las admitancias conectadas en paralelo por una equivalente.

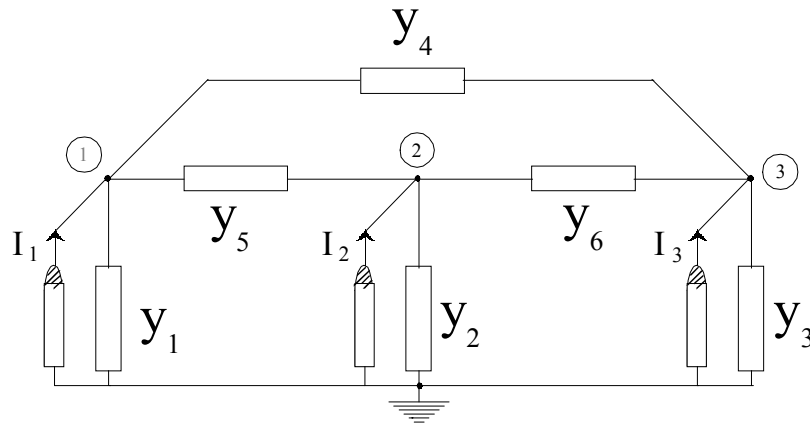


Figura 3.3. Circuito equivalente por fase del sistema eléctrico de potencia cuyo diagrama unifilar se muestra en la figura 3.1

Las fuentes ideales de voltaje, con las cuales se tiene familiaridad desde los cursos en teoría de circuitos, tienen la propiedad de suministrar energía manteniendo entre sus

terminales un voltaje que varía con el tiempo de acuerdo a una ley, independiente de la red que se conecta entre sus terminales. Análogamente puede decirse de las fuentes ideales de corriente son puertos cuya corriente, constante o variable con el tiempo, es independiente del circuito que se conecte a sus terminales.

Las fuentes de corriente de energía físicas nunca se comportan de esta manera ideal. Considere por ejemplo, un generador sincrónico: La potencia activa permanece constante si el torque mecánico exterior no varía y es independiente de las fluctuaciones en la magnitud del voltaje (suponiendo frecuencia aproximadamente constante); así mismo, la potencia reactiva varía con la magnitud del voltaje aunque se mantenga la corriente de campo constante.

Se ve pues, que el generador sincrónico no posee las propiedades de una fuente de voltaje ni tampoco de una de corriente, razón por la cual se le ha dado un símbolo especial y se ha incluido en él toda *GENERACION NEGATIVA*, una decisión lógica dado el alto contenido de motores síncronos en cargas típicas.

Debe decirse, además, que la fuente de potencia definida para representar la máquina sincrónica se aplica para el estado estacionario y no para condiciones transitorias. En análisis de corto circuito, por ejemplo, es mucho mejor la representación de la máquina sincrónica como una fuente de voltaje en serie con una impedancia.

Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff a los nodos independientes del circuito de la Figura 3.3 se pueden establecer el siguiente conjunto de ecuaciones linealmente independiente

$$\begin{aligned} I_1 &= V_1 y_1 + (V_1 - V_2) y_5 + (V_1 - V_3) y_4 \\ I_2 &= V_2 y_2 + (V_2 - V_1) y_5 + (V_2 - V_3) y_6 \\ I_3 &= V_3 y_3 + (V_3 - V_1) y_4 + (V_3 - V_2) y_6 \end{aligned} \quad (3.3)$$

que introduciendo la notación matricial toma la forma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= y_1 + y_4 + y_5 & Y_{23} &= Y_{32} = -y_6 \\
Y_{22} &= y_2 + y_5 + y_6 & Y_{13} &= Y_{31} = -y_4 \\
Y_{33} &= y_3 + y_4 + y_6 & Y_{12} &= Y_{21} = -y_5
\end{aligned} \tag{3.5}$$

El resultado anterior se puede generalizar introduciendo las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
\vec{I}_N &= \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} & \vec{V}_N &= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \\
[Y_N] &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1p} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2p} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \cdots & Y_{kp} & \cdots & Y_{kN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{Np} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\vec{I}_N$ es el vector de corrientes netas inyectadas en cada nodo, $\vec{V}_N$ es el vector de voltajes de nodo y $[Y_N]$ es la matriz admitancia de nodos. La ecuación general que describe completamente el comportamiento del sistema bajo condiciones balanceadas queda entonces:

$$\vec{I}_N = [Y_N] \vec{V}_N \tag{3.7}$$

Algunas veces es útil escribir la ecuación (3.7) en forma invertida

$$\vec{V}_N = [Z_N] \vec{I}_N \tag{3.8}$$

donde $[Z_N] = [Y_N]^{-1}$ se denomina *matriz impedancia de nodos*

Se nota que *las matrices constituyen modelos de las partes pasivas del sistema*

3.3 INTERPRETACIÓN CIRCUITAL DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ ADMITANCIA E IMPEDANCIA DE NODOS

Reemplazando (3.6) en (3.7) con

$$\vec{V}_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & \cdots & N \\ 0 & 0 & \cdots & V_p & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

es decir, cortocircuitando todos los nodos excepto el p -ésimo

$$I_k = Y_{k\ p} V_p \quad \forall (\text{para todo})\ k$$

Suponiendo $V_p = 1$

$$Y_{k\ p} = I_k|_{V_p=1} \quad (3.10)$$

(3.10) sugiere un *método para obtener circuitalmente* $Y_{k\ p}$ “evaluando la corriente a través del corto entre el k -ésimo nodo y la referencia” cuando se aplica un voltaje unitario únicamente en el p -ésimo nodo y se cortocircuitan todos los demás

Vale la pena mencionar que no existen métodos en la teoría de circuitos para obtener la corriente a través de un corto-circuito, ya que los nodos que une éste se convierten en uno mismo en el gráfico orientado.

Similarmente reemplazando en (3.8)

$$\vec{I}_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & \cdots & N \\ 0 & 0 & \cdots & I_p & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

es decir, inyectando una corriente únicamente en el p -ésimo nodo

$$V_k = Z_{k,p} I_p \quad \forall \text{ (para todo) } k$$

Suponiendo $I_p = 1$

$$Z_{k,p} = V_k|_{I_p=1} \quad (3.12)$$

(3.12) sugiere que $Z_{k,p}$ se puede obtener mediante el voltaje en el k -ésimo nodo cuando se inyecta una corriente unitaria únicamente entre la referencia y el p -ésimo nodo y en todas las demás se hacen cero (circuito abierto) la corriente neta inyectada

3.4 CONDICIONES BALANCEADAS: ECUACIÓN GENERAL NO LINEAL

Puesto en la práctica lo que se especifica o conoce es la potencia neta *generada* en cada barra, se puede reemplazar (3.2) y (3.6) en (3.7) para obtener el *conjunto linealmente independiente de ecuaciones no lineales que describe completamente el comportamiento del sistema bajo condiciones balanceadas*

$$\begin{bmatrix} \frac{S_{G1}^* - S_{D1}^*}{V_1^*} \\ \vdots \\ \frac{S_{Gk}^* - S_{Dk}^*}{V_k^*} \\ \vdots \\ \frac{S_{GN}^* - S_{DN}^*}{V_N^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1p} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2p} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \cdots & Y_{kp} & \cdots & Y_{kN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & & Y_{Np} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.4.1 ALGORITMO 3.1 PARA CONSTRUIR LA MATRIZ ADMITANCIA DE NODOS

De (3.5) se concluyen las siguientes *reglas simples para hallar los elementos de la matriz admitancia de nodos* $[Y_N]^7$

⁷ que se aplican únicamente cuando se desprecian los acoplamientos mutuos entre sistemas de transmisión,

$$Y_{kp} = \begin{cases} \text{Elementos diagonales:} & \text{Suma de **todas** las admitancias incidentes} \\ & \text{(conectadas) al nodo cuando } k = p \\ \text{elementos nodiagonales:} & \text{Admitancia equivalente conectada entre los} \\ & \text{nodos } k \text{ y } p, \text{ cambiada de signo } \forall k \neq p \end{cases}$$

Se pueden hacer las siguientes observaciones con respecto al sistema de ecuaciones (3.13)

- 1 Las ecuaciones son algebraicas porque representan un modelo del sistema bajo condiciones balanceadas del estado estacionario con excitación sinusoidal.
- 2 Las ecuaciones no son lineales. Esto puede ser motivo de preocupación para quienes saben que ésto representa grandes dificultades para hallar soluciones ANALÍTICAS. Sin embargo, la obtención de soluciones numéricas, que son las que interesan, se facilitan mediante el uso de la computadora digital.
- 3 Usualmente en análisis de circuitos las ecuaciones relacionan voltajes y corrientes. La ecuación (3.13) relaciona voltajes y potencias porque en sistemas de potencia en operación estable no se tiene interés explícito en conocer corrientes.
- 4 Se supone frecuencia constante y ésta no aparece explícitamente en las ecuaciones.
- 5 Las N ecuaciones (3.13) son complejas y, por lo tanto, representan $2n$ ecuaciones reales.
- 6 Además de los parámetros de la red hay $4n$ variables (excluyendo la frecuencia). Se debe reducir entonces el número de incógnitas para poder resolver el sistema. Aunque éste, por ser no lineal, puede tener más de una solución, existe una única de significado práctico. En sistemas de potencia generalmente se especifica la potencia (real y reactiva) neta generada en cada barra y se encuentra, la magnitud de los voltajes de barra y sus respectivos ángulos de fase. Se nota que la solución depende de las condiciones de generación y demanda.

es decir, para análisis del sistema bajo condiciones balanceadas. El lector interesado en un procedimiento general ver el capítulo sobre estudios de fallos

3.5 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA

3.5.1 CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DEL SISTEMA

Las variables del sistema se pueden dividir en los siguientes grupos naturales:

- 1 *VARIABLES INCONTROLABLES.* La demanda de potencia activa y reactiva la determina el usuario. Cambios impredecibles en ella desvían el sistema de su estado nominal. Es conveniente designar simbólicamente estas variables mediante las letras $p_1, p_2, \dots, p_{2N}$
- 2 *VARIABLES “INDEPENDIENTES” O DE CONTROL.* Son las que físicamente se usan para manipular otras llamadas:
- 3 *VARIABLES “DEPENDIENTES” O DE ESTADO.* Se acostumbra simbolizar estas ultimas con las letras $x_1, x_2, \dots, x_{2N}$ y las primeras con $u_1, u_2, \dots, u_{2N}$.

Puesto que, como se ha visto, la magnitud de los voltajes depende primordialmente de la generación de potencia reactiva y la diferencia entre sus ángulos de fase de la potencia activa, se introduce las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2N-1} \\ x_{2N} \end{bmatrix}}_{\text{vector de estado}} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ \delta_N \\ V_N \end{bmatrix} & \vec{u} &= \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2N-1} \\ u_{2N} \end{bmatrix}}_{\text{vector de variables de control}} = \begin{bmatrix} P_{G1} \\ Q_{G1} \\ \vdots \\ P_{GN} \\ Q_{GN} \end{bmatrix} \\
 \vec{p} &= \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{2N-1} \\ p_{2N} \end{bmatrix}}_{\text{variables incontrolables}} = \begin{bmatrix} P_{D1} \\ Q_{D1} \\ \vdots \\ P_{DN} \\ Q_{DN} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Introduciendo (3.14) el sistema de ecuaciones escalares equivalentes a (3.13) se pueden

escribir:

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{p}) = \vec{0} \quad (3.15)$$

que son la forma vectorial de las ecuaciones de flujos de potencia

3.5.2 DILEMA BÁSICO

La anterior clasificación sugiere el siguiente método para resolver el sistema de ecuaciones (3.13)

- 1 Suponer la demanda (variables incontrolables)
- 2 Especificar la generación (variables de control)
- 3 Hallar las variables de estado resolviendo (3.13), lo cual debe ser posible en principio ya que su número es igual al de ecuaciones.

Sin embargo, un examen mas detenido revela *dos dificultades que impiden seguir este procedimiento*:

- 1 No se puede especificar a priori todas las variables de generación porque todavía no se conocen las pérdidas que dependen de las variables de estado aún desconocidas Ver ecuaciones (2-15), (2-18) y (2-19)
- 2 Las ecuaciones no permiten encontrar los ángulos de fase individuales, sino diferencias de la forma $(\delta_p - \delta_k)$ Nótese, por ejemplo, que la adición de las mismas constantes a δ_p y a δ_k no afecta las ecuaciones (2-19).

El dilema anterior se resuelve:

- 1 Dejando sin especificar (como incógnitas) las variables P_G y Q_G de una de las barras, en las que se generan las pérdidas de todo el sistema. Esta barra se llama oscilante o flotante. Este hecho aumenta el número de incógnitas a $(2N + 2)$.
- 2 Escogiendo como fasor de referencia el voltaje de una barra. Generalmente se hace $\delta_1 = 0$. El número de incógnitas que queda es entonces $(2N + 1)$.
- 3 Especificando la magnitud del voltaje de una de las barras. Casi siempre se asigna un valor a V_1

3.5.3 LÍMITES PRÁCTICOS DE LAS VARIABLES DE ESTADO

Se sabe que el voltaje debe mantenerse dentro de los límites tolerables especificados. Los fabricantes garantizan una larga vida útil de los aparatos eléctricos siempre y cuando no se violen dichos límites

$$V_{i \min} \leq V_i \leq V_{i \max}$$

La capacidad máxima de las líneas de transmisión impone:

$$|\delta_p - \delta_k| < (\delta_p - \delta_k)_{\max}$$

3.5.4 LÍMITES PRÁCTICOS DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES O DE CONTROL

Se deben a las limitaciones físicas de los generadores

$$\begin{aligned} P_{Gi, \min} &\leq P_{Gi} \leq P_{Gi, \max} \\ Q_{Gi, \min} &\leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi, \max} \end{aligned}$$

En algunas barras particulares no se tiene generación y, por lo tanto $P_{Gi} = Q_{Gi} = 0$

Hay además algunas limitaciones económicas ya que como se señaló en el capítulo anterior, existe un número infinito de maneras de operar el sistema para satisfacer la demanda más las pérdidas, pero una sola alternativa es óptima desde el punto de vista de los costos, la cual no necesariamente minimiza las pérdidas.

CLASIFICACIÓN DE LAS BARRAS		
CATEGORÍA o TIPO	VARIABLES QUE SE ESTIMAN Y/O SE ESPECIFICAN	INCÓGNITAS OBTENIDAS DE RESOLVER (3.13) o (3.15)
<i>Carga (P – Q)</i>	$P_{Di}, Q_{Di}, P_{Gi}, Q_{Gi}$	V_i, δ_i
<i>Voltaje Controlado (P – V)</i>	$P_{Di}, Q_{Di}, V_i, \delta_i$	Q_{Gi}, δ_i
<i>De referencia u oscilante</i>	$P_{Di}, Q_{Di}, V_i, \delta_i = 0$	P_{Gi}, Q_{Gi}

Tabla 3.1: Clasificación de las barras de un Sistema Eléctrico de Potencia

Debido a que en los sistemas de transmisión la magnitud del voltaje debe mantenerse dentro de un margen muy estrecho alrededor del valor nominal puede que no sea posible utilizar el método descrito previamente. Considérese, por ejemplo, el caso de un

sistema de dos barras en el que se conocen o especifican los siguientes datos: P_{D1} , Q_{D1} , $\delta_1 (= 0)$, V_1 , P_{G2} , Q_{G2} , P_{D2} , Q_{D2} . Una vez resuelto el sistema de ecuaciones correspondiente el valor de V_2 puede estar fuera del rango permisible. En muchas situaciones prácticas es mucho mejor fijar a priori la magnitud del voltaje de algunas barras importantes y dejar que otras variables que tienen límites de variación más amplios asuman el papel de incógnitas. Se recuerda que en estas barras debe haber fuentes controlables de potencia reactiva.

3.5.5 ETAPAS DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA

Sabiendo cual es el “estado” del sistema, es decir, conociendo la magnitud de los voltajes y sus respectivos ángulos de fase se puede encontrar el flujo de potencia a través de cada sistema de transmisión. También es importante averiguar como se obtiene un estado o solución particular, es decir, las $2N$ componentes del vector de control que consiste en las potencias activa y reactiva generadas para obtenerlo.

El problema se puede dividir en las siguientes etapas

- 1 Formulación de un modelo circuital que describa las relaciones entre voltajes y potencias del sistema interconectado (Ecuaciones de flujos de carga)
- 2 Especificación de los límites entre los cuales deben mantenerse algunas de las variables asociadas a varias barras
- 3 Solución numérica de las ecuaciones obtenidas en 1[(3.13) o (3.15)] con sujeción a las restricciones definidas en 2
- 4 Cálculo de los flujos de potencia en todas las líneas de transmisión, de las pérdidas totales del sistema y aplicación de criterios para aceptar o rechazar la solución numérica del sistema de ecuaciones no lineales obtenida en 3

Nótese que falta tratar los dos últimos aspectos del problema.

3.6 ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA

Los requerimientos o características deseables de cualquier método numérico para resolver el problema planteado se pueden resumir en los siguientes puntos:

- 1 Debe ser aplicable a ecuaciones algebraicas *no lineales*

- 2 Debe ser independiente del número de ecuaciones
- 3 Debe conducir a resultados suficientemente precisos.
- 4 No debe consumir mucho tiempo ya que en una situación práctica se estudian distintas posibilidades de generación que satisfacen el mismo conjunto de demandas, lo cual permite seleccionar, de entre todas, la más económica.

En la solución de ecuaciones simultáneas algebraicas no lineales el método de “*adivinación sistemática e iterativa*”, es una necesidad práctica. Se han propuesto muchos métodos en la vasta literatura sobre técnicas numéricas, de entre los cuales nuestra atención se enfocará en 2 de ellos que han probado su utilidad en sistemas de potencia, a saber: *GAUSS-SEIDEL* y *NEWTON-RAPHSON*. En todos ellos a partir de una estimación inicial de la solución se obtienen sucesivamente otras mejores. La velocidad de convergencia y los requerimientos de memoria son los criterios que permiten juzgar sobre la calidad de cada uno de ellos

3.7 MÉTODO DE GAUSS

3.7.1 UNA ECUACIÓN NO LINEAL CON UNA INCÓGNITA

$$f(x) = 0$$

Se describe y justifica primero el algoritmo para resolver una ecuación no lineal con una sola incógnita, $f(x) = 0$, y después se extiende al caso general de un conjunto de ecuaciones no lineales: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$

- 1 Se reescribe la ecuación en la forma: $x = F(x)$ lo cual es siempre posible. Nótese que, en general, $F(x)$ no es única para la misma $f(x)$.
- 2 A partir de una solución inicial que se adivina se aplica iterativamente

$$x^{(j+1)} = F(x^{(j)})$$

- 3 El proceso iterativo se suspende cuando la diferencia entre dos estimaciones sucesivas es menor que cierta tolerancia especificada de antemano.

3.7.1.1 EJEMPLO 3.1

Resolver $f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$. Se puede verificar fácilmente que las raíces se ubican en $x = 1$ y $x = 4$.

En la figura 3.4 se muestra la grafica de las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 4$ en trazos punteados, $F(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ y $y = x$. En ella se nota que estas dos últimas se cruzan exactamente en donde $f(x)$ corta el eje x . Esta es la interpretación geométrica del método de Gauss.

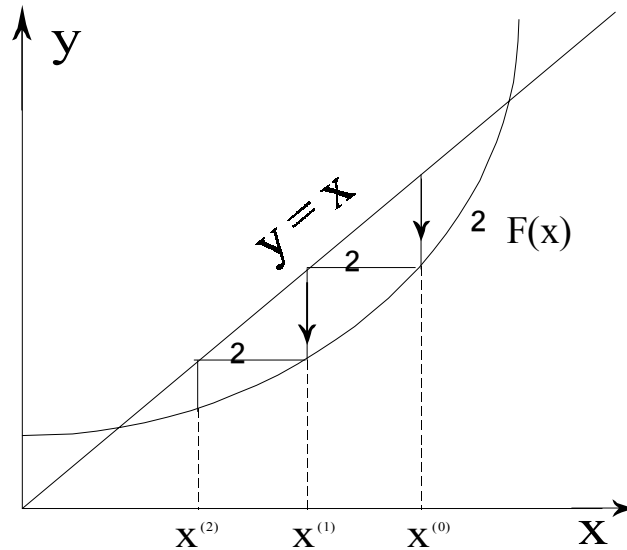


Figura 3.4. Interpretación geométrica del Método de Gauss

En este caso, si se parte de una estimación inicial $x^{(0)} = 3$ la solución converge a la raíz ubicada en $x = 1$ de acuerdo a las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= F(x^{(0)}) = 2.6 \\x^{(2)} &= F(x^{(1)}) = 2.15\end{aligned}$$

Nótese que si $x^{(0)} = 5$ el proceso diverge y que si $x^{(0)} = -2$ el proceso converge. Se concluye que *la convergencia del método depende mucho del valor inicial, lo cual junto con su lentitud constituyen sus principales desventajas*

3.7.2 CONJUNTO DE ECUACIONES NO LINEALES $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$

El algoritmo descrito se puede aplicar para resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

de la siguiente manera:

- 1 Re-escribir el sistema de ecuaciones (3.16) de la forma

$$\vec{x} = \vec{F}(\vec{x}) = \begin{cases} x_1 = F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ x_2 = F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ x_k = F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ x_n = F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

- 2 A partir de una adivinación inicial de la solución

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \dots & \dots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

obtener estimaciones sucesivas de acuerdo a la siguiente secuencia

$$\begin{aligned} x_1^{(j+1)} &= F_1(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\ x_2^{(j+1)} &= F_2(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\ &\vdots \\ x_k^{(j+1)} &= F_2(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\ &\vdots \\ x_n^{(j+1)} &= F_n(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

- 3 hasta que se satisfaga el siguiente criterio de convergencia: todas las componentes del vector $|\vec{x}^{(j+1)} - \vec{x}^{(j)}|$ deben ser menor o igual a la tolerancia especificada de antemano ϵ de acuerdo al nivel de precisión requerido.

Nótese que los valores de la iteración anterior deben conservarse hasta evaluar la última variable de la presente iteración.

3.7.2.1 EJEMPLO 3.2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_1x_2 - 1 &= 0 \\ 2x_2 - x_1x_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

el cual se puede re-escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 - \frac{x_1x_2}{2} \\ x_2 &= -0.5 + \frac{x_1x_2}{2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

cuya solución exacta es $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

Partiendo de una estimación inicial $x_1^{(0)} = 0$ y $x_2^{(0)} = 0$ se obtienen las siguientes aproximaciones aplicando (3.18)

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.5 & x_2^{(1)} &= -0.5 \\ x_1^{(2)} &= 0.625 & x_2^{(2)} &= -0.625 \\ x_1^{(3)} &= 0.695 & x_2^{(3)} &= -0.695 \end{aligned}$$

3.8 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

3.8.1 DESCRIPCIÓN

Es una modificación del anterior que consiste en reemplazar, cuando se hace la estimación para la k -ésima variable de una iteración ($j + 1$), el valor de las variables anteriores a ella estimadas en la misma iteración, con lo cual se obtiene una convergencia más rápida. Este criterio se puede expresar matemáticamente modificando (3.18) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_1^{(j+1)} &= F_1(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\
x_2^{(j+1)} &= F_2(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\
&\vdots \\
x_k^{(j+1)} &= F_k(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_{k-1}^{(j+1)}, x_k^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \\
&\vdots \\
x_n^{(j+1)} &= F_n(x_1^{(j+1)}, x_2^{(j+1)}, \dots, x_k^{(j+1)}, \dots, x_{n-1}^{(j+1)}, x_n^{(j)})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Se nota que en este método no se requiere almacenar las estimaciones de todas las variables de la iteración anterior como en el de Gauss y, por lo tanto, es más fácil de implementar, ya que es suficiente actualizar los valores de un mismo vector de trabajo que es la forma natural como el computador opera.

3.8.1.1 EJEMPLO 3.3

Resolver el problema del ejemplo 2 por el método de Gauss-Seidel partiendo de la misma estimación inicial de la solución

Aplicando (3.21) con (3.20) se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.5 & x_2^{(1)} &= -0.5 \\
x_1^{(2)} &= 0.625 & x_2^{(2)} &= -0.656 \\
x_1^{(3)} &= 0.705 & x_2^{(3)} &= -0.731
\end{aligned}$$

En los métodos iterativos de punto fijo a cada iteración debe verificar que se satisfaga la condición $f'(x^{(j)}) < 1$ debido a que si se excede este límite el proceso diverge. Si en cualquier iteración $f'(x^{(j)}) \approx 0$ hay dos raíces muy próximas

3.8.2 APLICACIÓN DEL FACTOR DE ACELERACIÓN

La Figura 3.5 muestra en la izquierda la secuencia de aproximaciones del método de Gauss sin factor de aceleración. En la parte derecha se muestra como se podría aumentar considerablemente la rapidez de convergencia del algoritmo llevando el valor calculado un poco más cerca a la raíz en cada iteración. Sin embargo deben tenerse en cuenta los siguientes aspectos

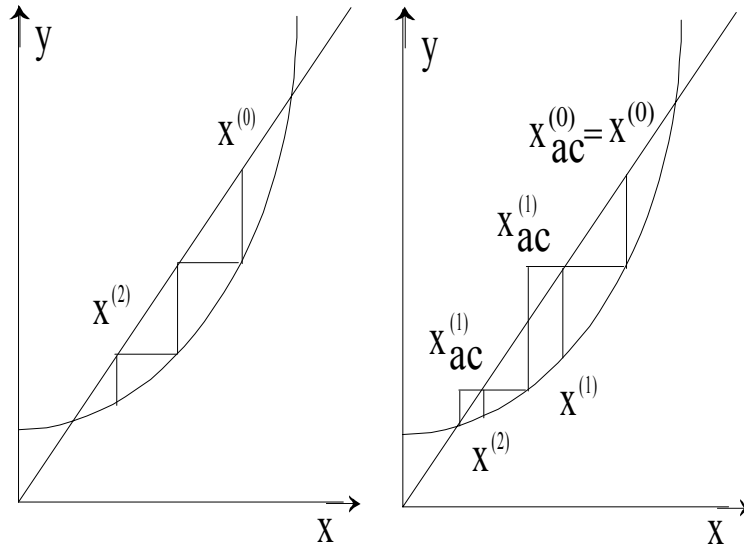


Figura 3.5. Interpretación geométrica del factor de aceleración

$$\begin{aligned}
 x^{(0)} &= x_{ac}^{(0)} && \text{por definición} \\
 x^{(j+1)} &= F(x_{ac}^{(j)}) \\
 \Delta x^{(j+1)} &= x^{(j+1)} - x_{ac}^{(j)} \\
 x_{ac}^{(j+1)} &= x_{ac}^{(j)} + \alpha \Delta x^{(j+1)} && \alpha > 1
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Vale la pena notar que un valor excesivo de α puede producir divergencia. Cuando se codifica el algoritmo es frecuente el error en el cálculo de $\Delta x^{(j+1)}$

3.8.3 ALGORITMO 3.2: MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Se puede resumir en la siguiente secuencia detallada de instrucciones:

- 1 Inicializar contador de iteraciones $j = 0$ y especificar tolerancia ε y prefijar el máximo número de iteraciones permitido *ITER*

- 2 Realizar adivinación inicial del vector solución

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_k^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1ac}^{(0)} \\ x_{2ac}^{(0)} \\ \vdots \\ x_{kac}^{(0)} \\ \vdots \\ x_{nac}^{(0)} \end{bmatrix}$$

- 3 $Dx \max = 0$; para mantener registro del mayor Δx ya el valor absoluto de todos los elementos del vector $\Delta \vec{x}$ deben ser menores que la tolerancia ε

- 4 Inicializar contador de ecuaciones $k = 1$

5

$$Save = F_k(x_{1ac}^{(j+1)}, x_{2ac}^{(j+1)}, \dots, x_{(k-1)ac}^{(j+1)}, x_{kac}^{(j)}, \dots, x_{nac}^{(j)}) \quad (3.23)$$

6

$$\Delta x = Save - x_{kac}^{(j)}$$

- 7 Si $|\Delta x| > Dx \max \Rightarrow Dx \max = |\Delta x|$ para retener el mayor valor

$$x_{kac}^{(j+1)} = x_{kac}^{(j)} + \alpha \Delta x \quad \alpha > 1$$

- 8 incrementar contador de ecuaciones: $k = k + 1$

- 9 Si $k \leq n$ ir a la instrucción 5. En caso contrario seguir en 11.

- 10 Si $Dx \max \leq \varepsilon$ ya se obtuvo convergencia (terminar). La solución queda almacenada en el vector de trabajo $\vec{x}$. En caso contrario seguir en 11

- 11 Incrementar contador de iteraciones $j = j + 1$,

- 12 Verificar que no se ha excedido el máximo número de iteraciones permitido. Es decir, si $j \leq ITER$ devolverse a la instrucción 3. En caso contrario ir a 14

- 13 Imprimir mensaje de no convergencia.

- 14 Terminar

3.8.3.1 EJEMPLO 3.4

Resolver el sistema de ecuaciones (3.19) por el método de Gauss-Seidel con factor de aceleración $\alpha = 1.5$

Se aplica el algoritmo descrito con el conjunto de ecuaciones (3.20) sin control de iteraciones ni de convergencia para ilustrar dos iteraciones:

$$j = 0$$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{matrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{matrix} = \begin{matrix} x_{1ac}^{(0)} \\ x_{2ac}^{(0)} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Dx_{\max} = 0$$

$$Save = 0.5 - \frac{x_{1ac}^{(0)} x_{2ac}^{(0)}}{2} = 0.5$$

$$\Delta x = Save - x_{1ac}^{(0)} = 0.5$$

$$Dx_{\max} = 0.5$$

$$x_{1ac}^{(1)} = 0 + 1.5 * 0.5 = 0.750$$

$$Save = -0.5 + \frac{x_{1ac}^{(1)} x_{2ac}^{(0)}}{2} = -0.5$$

$$\Delta x = Save - x_{2ac}^{(0)} = -0.5$$

$$x_{2ac}^{(1)} = 0 + 1.5 * (-0.5) = -0.750$$

Similarmente los cálculos correspondientes a la segunda iteración siguen el mismo patrón

$$Dx_{\max} = 0$$

$$Save = 0.5 - \frac{x_{1ac}^{(1)} x_{2ac}^{(1)}}{2} = 0.78125$$

$$\Delta x = Save - x_{1ac}^{(1)} = 0.03125$$

$$Dx \max = 0.03125$$

$$x_{1ac}^{(1)} = 0.750 + 1.5 * 0.03125 = 0.7969$$

$$Save = -0.5 + \frac{x_{1ac}^{(1)} x_{2ac}^{(0)}}{2} = -0.7988$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= Save - x_{2ac}^{(0)} = -0.0488 \\ Dx \max &= 0.0488 \end{aligned}$$

$$x_{2ac}^{(1)} = -0.75 + 1.5 * (-0.0488) = -0.8232$$

No existen criterios definidos para seleccionar el valor de α y cada caso particular se debe estudiar separadamente. Para la solución de las ecuaciones de flujos de potencia se ha probado que las mejores características de convergencia se obtienen si $1.4 \leq \alpha \leq 1.7$.

3.9 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Se presentan primero los fundamentos matemáticos

3.9.1 EXPANSIÓN DE UNA FUNCIÓN $f(x)$ EN UNA SERIE DE

POTENCIAS

Surge del intento de aproximar una función arbitraria $f(x)$ mediante un polinomial de orden n arbitrario $p_n(x)$. Para que la aproximación se considere válida en una región pequeña centrada alrededor de un valor particular de la variable independiente $x = a$, se requiere que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$p_n(a) = f(a)$$

$$p'_n(a) = f'(a)$$

$$p''_n(a) = f''(a)$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

donde se ha utilizado la siguiente notación

$$p_n(a) = p_n(x)|_{x=a} \quad f(a) = f(x)|_{x=a}$$

$$p'_n(a) = \left. \frac{d}{dx} p_n(x) \right|_{x=a} \quad f'(a) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

y en general

$$p_n^{(k)}(a) = \left. \frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}} p_n(x) \right|_{x=a} \quad f^{(k)}(a) = \left. \frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}} f(x) \right|_{x=a}$$

Si se supone el polinomio de la forma

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) = & a_n(x-a)^n + a_{(n-1)}(x-a)^{(n-1)} + a_{(n-2)}(x-a)^{(n-2)} + \\ & + \cdots + a_2(x-a)^2 + a_1(x-a) + a_0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

fácilmente se puede demostrar que

$$a_0 = f(a)$$

$$a_1 = f'(a)$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad f^{(0)}(a) = f(x)|_{x=a} \quad (3.25)$$

y por tanto la expansión en series de Taylor de una función $f(x)$ de una sola variable en el entorno del punto $x = a$ es:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k \quad (3.26)$$

donde los a_k se obtienen de (3.25) y en este caso (3.26) se conoce con el nombre de *expansión de $f(x)$ en una serie de Taylor*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \quad (3.27)$$

Cuando $a = 0$ se obtiene la *expansión de $f(x)$ en serie de McLaurin* a partir de las cuales se obtienen las conocidas series

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

3.9.2 ALGORITMO 3.3

El método de Newton-Raphson se basa en una aproximar la función como una línea recta que pasa por el punto $[a = x^{(j)}, f(a) = f(x^{(j)})]$ con pendiente $f'(x^{(j)}) = f'(a)$ como se muestra en la Figura 3.6 El valor de la abscisa por la que dicha recta corta el eje x es la siguiente estimación de la solución $x^{(j+1)}$ y se obtiene igualando a 0 la ecuación que la representa. Expresando matemáticamente esta condición

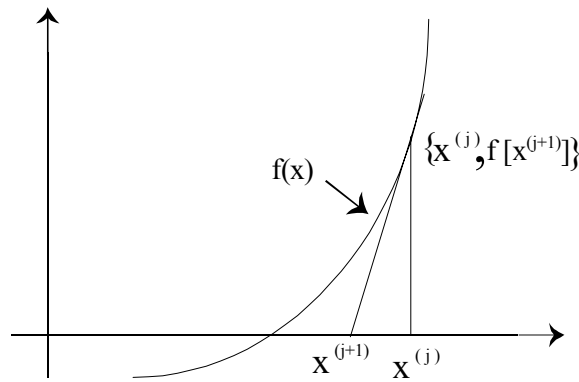


Figura 3.6. Interpretación geométrica del método de Newton-Raphson para resolver $f(x) = 0$

$$f(x) \approx y = a_1(x - a) + a_0 \quad (3.28)$$

igualando (3.28) a 0 ($y = 0$) y reemplazando en ella $a = x^{(j)}$, $x = x^{(j+1)}$, $a_0 = f(a) = f(x^{(j)})$ y $a_1 = f'(a) = f'(x^{(j)})$, se obtiene:

$$0 - f(x^{(j)}) = f'(x^{(j)})[x^{(j+1)} - x^{(j)}]$$

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - \frac{f(x^{(j)})}{f'(x^{(j)})} \quad (3.29)$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA: Una vez hecha cualquier estimación de la solución (incluida la inicial) se debe verificar

$$|f(x^{(j)})| \leq \epsilon$$

donde ϵ es una tolerancia especificada de antemano de acuerdo al nivel de precisión deseado

De la expansión (3.27) se puede ver que la rapidez de convergencia depende de que se puedan despreciar los términos de orden superior, es decir, cuando la calidad de la estimación inicial es buena ya que en este caso $(\Delta x)^k = (x - a)^k = (x^{(j+1)} - x^{(j)})^k$ es despreciable $k \geq 2$.

3.9.2.1 EJEMPLO 3.5

Resolver $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Si se supone $x^{(0)} = 7$, entonces $f(x^{(0)}) = 18$, $f'(x) = 2x - 5$ y $f'(x^{(0)}) = 9$. La Figura 3.7 muestra $f(x)$ y la ecuación de la recta $y = 9x - 45$ que es la que pasa por el punto $(7, 18)$ y tiene pendiente 9

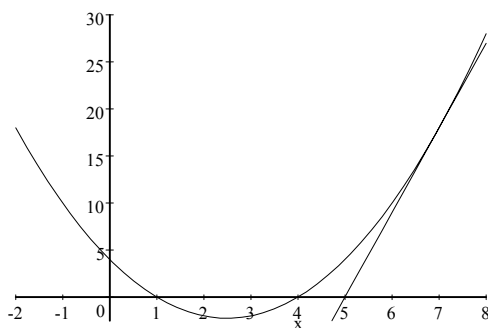


Figura 3.7. Solución gráfica del problema del ejemplo 5

Aplicando (3.29) se obtiene

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = 7 - \frac{18}{9} = 5$$

Continuando con la secuencia se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned} f(x^{(1)}) &= f(5) = 4 & f'(x^{(1)}) &= f'(5) = 3 \\ x^{(2)} &= x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = 5 - \frac{4}{3} = 4.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^{(2)}) &= f(4.25) = 0.8125 & f'(x^{(2)}) &= f'(4.25) = 3.5 \\ x^{(3)} &= x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})} = 4.25 - \frac{0.8125}{3.5} = 4.0179 \end{aligned}$$

La solución exacta es $x = 4$.

3.9.3 EXPANSIÓN DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES EN UNA SERIE DE TAYLOR

3.9.3.1 FUNCIÓN DE DOS VARIABLES $f(x, y)$

Considerando y como una constante se puede considerar $f(x, y) = g(x)$ la cual se puede aproximar en el entorno de la región centrada en $x = a$ mediante una serie de potencias (3.27).

$$g(x) = g(a) + g'(a)(\Delta x) + \frac{1}{2}g''(a)(\Delta x)^2 + \dots \quad (3.30)$$

En este caso

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a & g(a) &= f(a, y) \\ g'(a) &= \left. \frac{d}{dx}g(x) \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial}{\partial x}f(x) \right|_{(a, y)} = f_x(a, y) \\ g''(a) &= \left. \frac{d^2}{dx^2}g(x) \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) \right|_{(a, y)} = f_{xx}(a, y) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Es decir

$$f(x, y) = f(a, y) + f_x(a, y)(\Delta x) + f_{xx}(a, y)(\Delta x)^2 + \dots \quad (3.32)$$

donde $f(a, y)$, $f_x(a, y)$ y $f_{xx}(a, y)$ se pueden considerar funciones diferentes de la variable independiente y y, por lo tanto, se pueden aproximar mediante una serie de potencias (3.27) en el entorno de la región centrada en $y = b$ en cuyo caso

$$\begin{aligned} f(a, y) &= f(a, b) + f_y(a, b)(\Delta y) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots \\ f_x(a, y) &= f_x(a, b) + f_{yx}(a, b)(\Delta y) + f_{yyx}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots \\ f_{xx}(a, y) &= f_{xx}(a, b) + f_{yxx}(a, b)(\Delta y) + \frac{1}{2}f_{yyxx}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde $\Delta y = y - b$ y $\Delta x = x - a$

$$\begin{aligned} f_y(a, b) &= \left. \frac{d}{dy} f(a, y) \right|_{y=b} = \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{(a, b)} & f_x(a, b) &= f_x(a, y)|_{y=b} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(a, b)} \\ f_{yy}(a, b) &= \left. \frac{d^2}{dy^2} f(a, y) \right|_{y=b} = \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right|_{(a, b)} & f_{yx}(a, b) &= \left. \frac{d}{dy} f_x(a, y) \right|_{y=b} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(a, b)} \\ f_{xx}(a, b) &= f_{xx}(a, y)|_{y=b} = \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right|_{(a, b)} \end{aligned}$$

Reemplazando (3.33) en (3.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [f(a, b) + f_y(a, b)(\Delta y) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots] + \\ &\quad [f_x(a, b) + f_{yx}(a, b)(\Delta y) + f_{yyx}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots](\Delta x) + \\ &\quad \frac{1}{2}[f_{xx}(a, b) + f_{yxx}(a, b)(\Delta y) + \frac{1}{2}f_{yyxx}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots](\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Despreciando términos de tercer orden y superiores en (3.34) se obtiene

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(\Delta x)^2 + f_{yx}(a, b)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(\Delta y)^2$$

$$f(x, y) = f(a, b) + [f_x(a, b) \ f_y(a, b)] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f \quad (3.35)$$

donde en el último término se ha introducido una notación que tiene un significado de operar sobre la función $f(x, y)$ y debe evaluarse en punto (a, b) como lo sugiere la ecuación que le precede

En dos dimensiones $f(a, b) + [f_x(a, b) \ f_y(a, b)] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$ es la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x, y)$ en el punto (a, b) cuya normal coincide con el *gradiente* $\nabla f(x, y)|_{(a, b)} = [f_x(a, b)\vec{i} \ f_y(a, b)\vec{j}]^T$ donde T es la transpuesta de $[\]$

Generalizando (3.35) a una función de n variables incluidas en el vector $\vec{x}$ y haciendo una aproximación lineal válida en las proximidades del “punto” $\vec{x}^{(0)}$ se obtiene

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^{(0)}) + [\nabla f(\vec{x})]^T \Big|_{\vec{x}^{(0)}} [\vec{x} - \vec{x}^{(0)}] \quad (3.36)$$

que es la ecuación de un hiperplano

Cuando se tiene un conjunto simultáneo de ecuaciones no lineales $\vec{f}(\vec{x})$ (3.36) toma la forma

$$f_1(\vec{x}) = f_1(\vec{x}^{(0)}) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right] \Delta \vec{x}$$

$$f_2(\vec{x}) = f_2(\vec{x}^{(0)}) + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right] \Delta \vec{x}$$

... =

$$f_n(\vec{x}) = f_n(\vec{x}^{(0)}) + \left[\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right] \Delta \vec{x}$$

que expresadas en notación matricial queda

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^{(0)}) \\ f_2(\vec{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

donde la matriz en (3.37) se denomina la **Jacobiana**

3.9.4 ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON PARA RESOLVER $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$

- 1 Inicializar contador de iteraciones: $j = 0$
- 2 Realizar adivinación inicial de la solución

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

3 Chequear convergencia

$$\begin{bmatrix} |f_1(\vec{x}^{(0)})| \leq \varepsilon \\ |f_2(\vec{x}^{(0)})| \leq \varepsilon \\ \vdots \\ \vdots \\ |f_n(\vec{x}^{(0)})| \leq \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Nótese que los valores algebraicos de las $f_k(\vec{x}^{(j)})$ se requieren para la expansión (3.37) y que en (3.38) tan pronto una condición deje de cumplirse no es necesario realizar las restantes.

- 4 Si se cumplen todas las condiciones (3.38) ya se obtuvo convergencia. En caso contrario seguir en la instrucción 5
- 5 Obtener la matriz Jacobiana y evaluarla para los valores estimados para la solución hasta el momento

$$[J]_{\vec{x}^{(j)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}^{(j)}}$$

6 Resolver el sistema lineal de ecuaciones

$$f(\vec{x}^{(j)}) + [J]_{\vec{x}^{(0)}} \Delta \vec{x}^{(j)} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^{(0)}) \\ f_2(\vec{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}^{(j)}} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(j)} \\ \Delta x_2^{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

7 Obtener la siguiente estimación

$$\vec{x}^{(j+1)} = \vec{x}^{(j)} + \alpha \Delta \vec{x}^{(j)} \quad (3.40)$$

donde se ha introducido como una opción el *factor de aceleración* α cuya propósito es el de acelerar la convergencia como ya se describió

- 8 Incrementar contador de iteraciones $j = j + 1$ y si no se ha excedido el máximo permitido (constante prefijada de antemano) ir a la instrucción 3

3.9.4.1 EJEMPLO 3.6

Resolver el sistema de (3.19) por el método de Newton-Raphson. Por comodidad se escribe de nuevo el conjunto de ecuaciones no lineales referido y las expresiones de cada uno de los elementos de la matriz Jacobiana correspondientes:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_2 - x_1x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2 + x_2 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

- 1 $j = 0$ inicializa contador de iteraciones.
- 2

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} = 1 \\ x_2^{(0)} = 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

estimación inicial

- 3 Evaluación del término independiente en el sistema lineal de ecuaciones (3.39)

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 2 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

- 4 Chequeo de convergencia para una tolerancia $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{bmatrix} \left| f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \right| \leq \varepsilon \\ \left| f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \right| \leq \varepsilon \end{bmatrix}$$

5 Evaluación de la matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})} = 3 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})} = 1 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})} = -1 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})} = 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

6 Reemplazando (3.43) y (3.44) en (3.39) y resolviendo se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

7 Reemplazando (3.45) y (3.42) en (3.40) se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} = 1 \\ x_2^{(1)} = -1 \end{bmatrix}$$

que es la solución exacta

Si se realizara el mismo ejercicio partiendo de una estimación inicial

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} = 0 \\ x_2^{(0)} = 0 \end{bmatrix}$$

y sin factor de aceleración se obtendrían los siguientes resultados en las primeras dos iteraciones:

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} = 0.5 \\ x_2^{(1)} = -0.5 \end{bmatrix} \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} = 0.75 \\ x_2^{(2)} = -0.75 \end{bmatrix}$$

lo que induciría a pensar que la convergencia de este método comparado con el de Gauss-Seidel acelerado, por ejemplo, no es impresionante. Sin embargo, si se hicieran dos iteraciones más se pondría en evidencia su superioridad. Las primeras dos iteraciones son lentas debido a la pobreza de la estimación inicial. Pero a medida que se acerca a los valores correctos de la solución exacta la convergencia se hace extremadamente rápida. La gran desventaja del método es la necesidad de calcular la matriz

Jacobiana y la de resolver un sistema de ecuaciones lineales a cada iteración

3.10 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE CARGA

3.10.1 CODIFICACIÓN DE BARRAS

- 1 Barra oscilante o de referencia: $i = 1$
- 2 Barras de voltaje controlado o $P - V$: $i = 2, 3, \dots, m$
- 3 Barras de carga: $i = m + 1, m + 2, \dots, n$

3.10.2 DATOS

- 1 Parámetros del sistema de transmisión (no incluye generadores)
- 2 Magnitudes de los voltajes en la barra oscilante y en las de voltaje controlado $V_{1\text{ esp}}, V_{2\text{ esp}}, V_{3\text{ esp}}, \dots, V_{m\text{ esp}}$
- 3 Potencias activas (generación y demanda) en todas las barras excepto en la oscilante: $P_2, P_3, \dots, P_n$
- 4 Potencia reactiva (generación y demanda) en las barras de carga: $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_n$
- 5 Demanda de potencia reactiva en las barras de voltaje controlado: $Q_{D2}, \dots, Q_{Dm}$
- 6 Demanda de potencia (activa y reactiva) en la barra oscilante: P_{D1}, Q_{D1}
- 7 Ángulo de fase en la barra de referencia: $\delta_1 = 0$

3.10.3 INCÓGNITAS

- 1 Ángulos de potencia en todas las barras, excepto en la oscilante: $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$
- 2 Magnitud de los voltajes en las barras de carga: $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_n$
- 3 Potencias reactivas generadas en las barras de voltaje controlado: $Q_{G2}, Q_{G3}, \dots,$

Q_{Gm}

- 4 Potencia (activa y reactiva) en la barra oscilante: P_{G1}, Q_{G1} .

3.11 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL: ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA

Por razones pedagógicas se ilustrará primero el caso en el que no hay barras de voltaje controlado, es decir, se supone que, además de la barra oscilante o de referencia (la número 1), únicamente hay barras de carga o $P-Q$. En este caso se nota que las últimas $N-1$ ecuaciones del sistema (3.13) constituyen un conjunto linealmente independiente de $N-1$ ecuaciones con $N-1$ incógnitas: $V_2, V_3, \dots, V_N$, que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{(P_{Gi} - P_{Di}) - j(Q_{Gi} - Q_{Di})}{\mathbf{V}_i^*} = \sum_{k=1}^N \mathbf{Y}_{ik} \mathbf{V}_k \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.46)$$

El conjunto (3.46) debe ser expresado primero en la forma (3.16) con $\vec{x} = [V_2 \ V_3 \ \dots \ V_N]^T$ de la siguiente manera:

$$\frac{(P_{Gi} - P_{Di}) - j(Q_{Gi} - Q_{Di})}{\mathbf{V}_i^*} = \sum_{k \neq i} \mathbf{Y}_{ik} \mathbf{V}_k + \mathbf{Y}_{ii} \mathbf{V}_i \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$V_i = \sum_{k \neq i} B_{ik} V_k + \frac{A_i}{V_i^*} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.47)$$

donde se ha definido

$$B_{ik} = \frac{Y_{ik}}{Y_{ii}} \quad A_i = \frac{(P_{Gi} - P_{Di}) - j(Q_{Gi} - Q_{Di})}{Y_{ii}} \quad (3.48)$$

Las constantes B_{ik} y A_i no varían de una iteración a otra, razón por la cual es conveniente calcularlas antes de comenzar el proceso iterativo

Reescribiendo (3.47) en la forma (3.17) se obtiene:

$$\mathbf{V}_i^{(j+1)} = - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{V}_{k-ac}^{(j+1)} - \sum_{k=i+1}^N \mathbf{B}_{ik} \mathbf{V}_{k-ac}^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_i}{\left[\mathbf{V}_{i-ac}^{(j)} \right]^*} \quad (3.49)$$

$i = 2, 3, \dots, N$

La descomposición de la sumatoria en (3.49) se realiza para satisfacer la condición $k \neq i$ pero principalmente para enfatizar que en el momento de calcular el voltaje para la i -ésima barra ya se tienen estimaciones en la presente iteración de los voltajes de todas las anteriores. Sin embargo, en la codificación e implementación del algoritmo solo se trabaja con el vector de trabajo que almacena los voltajes (incógnitas).

3.11.1 ALGORITMO 3.4

Una vez leídos los datos y calculados las constantes el proceso iterativo se puede resumir en la siguiente secuencia detallada de instrucciones:

- 1 $j = 0$ Inicializar contador de iteraciones
- 2 $DV_{\max} = 0$ Guarda el máximo $|\Delta \mathbf{V}_i|$ que se presente
- 3 $i = 2$ inicializa contador de barras
- 4 $Save = \mathbf{V}_{i-ac}^{(j)}$ Lo que haya en dicha posición en el vector de trabajo. ($\mathbf{V}_{i-ac}^{(0)} = \mathbf{V}_i^{(0)}$)
- 5 Aplicar (3.49). Es decir

$$Vtemp = - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{B}_{ik} \mathbf{V}_{k-ac}^{(j+1)} - \sum_{k=i+1}^N \mathbf{B}_{ik} \mathbf{V}_{k-ac}^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_i}{\left[\mathbf{V}_{i-ac}^{(j)} \right]^*} \quad (3.50)$$

- 6 $\Delta \mathbf{V}_i = Vtemp - \mathbf{V}_{i-ac}^{(j)}$ $\Delta \mathbf{V}_i$ es una posición de memoria. No un elemento de un vector
- 7 $\mathbf{V}_{i-ac}^{(j+1)} = \mathbf{V}_{i-ac}^{(j)} + \alpha \Delta \mathbf{V}_i$
- 8 $DELTA = |\Delta \mathbf{V}_i|$
- 9 Si $DELTA > DV_{\max}$, $DV_{\max} = DELTA$
- 10 $i = i + 1$ Incrementar contador de barras

- 11 Si $i \leq N$, ir a la instrucción 4
- 12 Si $DV_{\max} < \epsilon$ (ϵ tolerancia especificada de antemano) ir a la instrucción 15.
- 13 $j = j + 1$ Incrementar contador de iteraciones
- 14 Si $j > ITER$ (máximo número de iteraciones permitidas) imprimir mensaje de no convergencia y terminar. En caso contrario ir a la instrucción 2
- 15 Calcular flujos de potencia en todos los elementos [ecs. (2-16) y (2-19)], pérdidas en cada uno de ellos [ec. (2-20)], pérdidas totales, generación activa y reactiva en la barra oscilante y desbalance.

3.11.2 MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO ANTERIOR CUANDO HAY BARRAS DE VOLTAJE CONTROLADO

Después de la instrucción 4 del algoritmo anterior realizar la secuencia de la Figura 3.8.

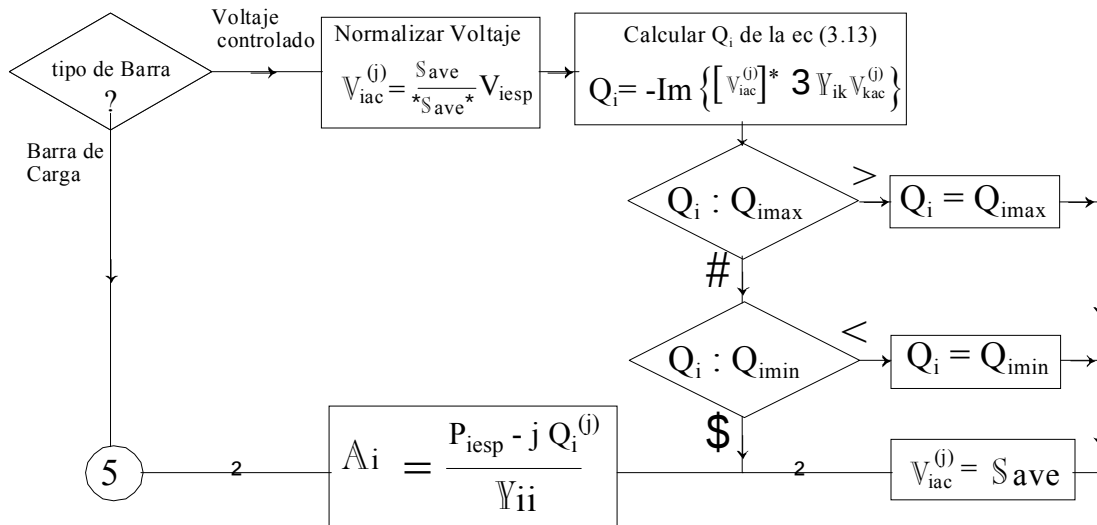


Figura 3.8. Modificación del algoritmo de Gauss-Seidel para considerar barras de voltaje controlado

3.11.3 EJEMPLO 3.7

La Figura 3.9 muestra el diagrama unifilar de un sistema eléctrico de potencia cuyos datos de línea en tanto por uno tomando como base $S_b = 100 \text{ Mva}$ y $V_b = 230 \text{ kV}$ se consignan en la tabla 3.2. La Tabla 3.3 muestra los datos de barra. Los valores de

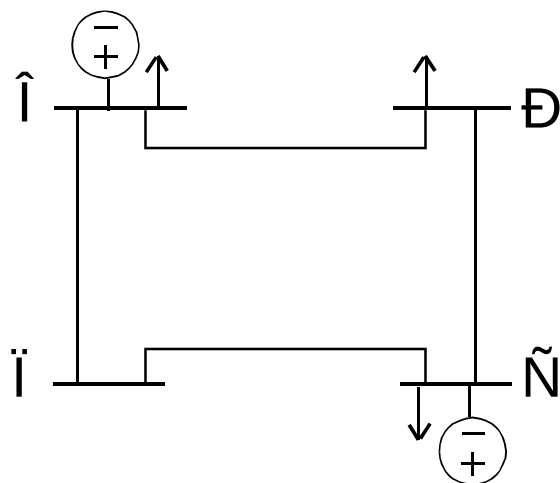


Figura 3.9. Diagrama unifilar del ejemplo

Q_{Di} se calculan suponiendo que el factor de potencia de las cargas es 0.85. Se realiza a continuación una iteración por el método de Gauss-Seidel aplicando el algoritmo 3.4 con un factor de aceleración $\alpha = 1.4$

Envío	Recibo	Impedancia Serie		Admitancia Paralelo (Susceptancia) Total $y_{sh T}$
		Resistencia $\hat{R}$	Reactancia $\hat{X}$	
1	2	0.01008	0.05040	0.05125
1	3	0.00744	0.03720	0.03875
2	4	0.00744	0.03720	0.03875
3	4	0.01272	0.06360	0.06375

Tabla 3.2: Datos de línea para el ejemplo 3.4

Con los datos de línea de tabla 3.2 y aplicando el ALGORITMO 3.1 se obtiene la siguiente *MATRIZ ADMITANCIA DE NODOS*

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} 8.9852 - 44.8810i & -3.8156 + 19.0781i & -5.1696 + 25.8478i \\ -3.8156 + 19.0781i & 8.9852 - 44.8810i & 0.0000 + 0.0000i \\ -5.1696 + 25.8478i & 0.0000 + 0.0000i & 8.1933 - 40.9151i \\ 0.0000 + 0.0000i & -5.1696 + 25.8478i & -3.0237 + 15.1185i \\ & 0.0000 + 0.0000i & & & & \\ & -5.1696 + 25.8478i & & & & \\ & -3.0237 + 15.1185i & & & & \\ & 8.1933 - 40.9151i & & & & \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

i	Tipo	Generación		Demanda		$\hat{V}_i^{(0)}$ (p. u.)	
		$P_{Gi} (Mw)$	$Q_{Gi} (Mvar)$	$P_{Di} (Mw)$	$Q_{Di} (Mvar)$	$\hat{V}_i$	$\delta_i (^\circ)$
1	Ref			50	30.99	1.00	0°
2	Carga	0	0	170	105.35	1.00	- 10°
3	Carga	0	0	200	123.94	1.00	- 5°
4	$P - V$	318		80	49.58	1.02	- 15°

Tabla 3.3: Datos de barra para el ejemplo 3.4

Antes de comenzar el proceso iterativo se deben calcular las constantes sugeridas en (3.48) que permanecen invariantes de una iteración a otra

$$[B] = \begin{bmatrix} -0.4251 + 0.0001i & & 0.0000 + 0.0000i \\ -0.6317 + 0.0002i & 0.0000 + 0.0000i & \\ 0.0000 + 0.0000i & -0.6317 + 0.0002i & -0.3695 + 0.0001i \\ & -0.5759 + 0.0001i & \\ & -0.3695 + 0.0001i & \end{bmatrix}$$

Con los datos de barra de la tabla 3.3 y aplicando la definición (3.48) *únicamente a las barras de carga*, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{-1.70 + 1.0535i}{8.9852 - 44.8810i} = -0.0299 - 0.0319i \\ A_3 &= \frac{-2.0 + 1.2394i}{8.1933 - 40.9151i} = -0.0385 - 0.0412i \end{aligned} \quad (3.52)$$

Se supone la siguiente estimación de voltajes

$$\vec{V}_{ac}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1\angle 0^\circ & 1\angle -10^\circ & 1\angle -5^\circ & 1.02\angle -15^\circ \end{bmatrix}^T \quad (3.53)$$

Aplicando el algoritmo 3.4 se obtiene secuencialmente:

$$j = 0 \quad DV \max = 0$$

$$i = 2 \quad Save = V_{2ac}^{(j)} = 1 \angle -10^\circ$$

Como $i = 2$ identifica a una barra de carga se aplica (3.50) recordando que tanto V_1 como $|V_4|$ son las constantes sugeridas en (3.53)

$$Vtemp = -B_{21}V_1 - B_{23}V_{3ac}^{(0)} - B_{34}V_{4ac}^{(0)} + \frac{A_2}{[V_{2ac}^{(0)}]^*} \quad (3.54)$$

Reemplazando valores en (3.54) se obtiene

$$Vtemp = 0.9575 - 0.1785i$$

$$\Delta V = Vtemp - V_{2ac}^{(0)} = -0.0273 - 0.0483i$$

$$V_{2ac}^{(1)} = V_{2ac}^{(0)} + \alpha * \Delta V = 0.9466 - 0.1804i$$

$$DELTA = |\Delta V| = 0.0277$$

$$DV_{\max} = 0.0277$$

$$i = 3 \quad Save = V_{3ac}^{(j)} = 1 \angle -5^\circ$$

Como $i = 3$ identifica a una barra de carga se aplica (3.50) recordando que tanto V_1 como $|V_4|$ son las constantes sugeridas (3.53)

$$\mathbf{V}_{temp} = -\mathbf{B}_{31}\mathbf{V}_1 - B_{32}\mathbf{V}_{2ac}^{(1)} - \mathbf{B}_{34}\mathbf{V}_{4ac}^{(0)} + \frac{\mathbf{A}_3}{\left[\mathbf{V}_{3ac}^{(0)}\right]^*} \quad (3.55)$$

Reemplazando valores en (3.54) se obtiene

$$V_{temp} = 0.9538 - 0.1354i$$

$$\Delta V = V_{temp} - V_{3ac}^{(0)} = -0.0424 - 0.0483i$$

$$V_{3ac}^{(1)} = V_{3ac}^{(0)} + \alpha * \Delta V = 0.9368 - 0.1547i$$

$$DELTA = |\Delta V| = 0.0643$$

De la comparación entre $DELTA$ y DV_{max} se obtiene

$$DV_{max} = 0.0643$$

$$i = 4 \quad Save = V_{4ac}^{(j)} = 1.02 \angle -15^\circ$$

Como $i = 4$ identifica a una barra de voltaje controlado antes de aplicar (3.50) se debe normalizar el voltaje, calcular la potencia reactiva y la constante $\mathbf{A}_4$. Aplicando (3.46) se obtiene

$$V_{4ac}^{(0)} = \frac{Save}{|Save|} V_{4esp} = 1.02 \angle -15^\circ = 0.9852 - 0.2640i$$

$$Q_{G4} = Q_{D4} - \text{Im} \left\{ \left[\mathbf{V}_{4ac}^{(0)} \right]^* \sum_{k=1}^N \mathbf{Y}_{4k} \mathbf{V}_k \right\} \quad (3.56)$$

Reemplazando valores en (3.56) se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{G4} &= 3.8161 \\ A_4 &= 0.0892 + 0.0403i \end{aligned}$$

Normalmente se debe verificar que la potencia reactiva Q_{G4} no exceda los límites impuestos por la máquina instalada. Sin embargo se supone una capacidad ilimitada de generación en esta barra

$$\mathbf{V}_{temp} = -\mathbf{B}_{41} \mathbf{V}_1 - B_{32} \mathbf{V}_{2ac}^{(1)} - \mathbf{B}_{33} \mathbf{V}_{3ac}^{(1)} + \frac{A_4}{\left[\mathbf{V}_{4ac}^{(0)} \right]^*} \quad (3.57)$$

Reemplazando valores en (3.57) se obtiene

$$\mathbf{V}_{temp} = 1.0388 - 0.1558i$$

$$\Delta V = \mathbf{V}_{temp} - V_{3ac}^{(0)} = 0.0535 + 0.1082$$

$$\mathbf{V}_{4ac}^{(1)} = V_{4ac}^{(0)} + \alpha * \Delta V = 1.0602 - 0.1126i$$

$$DELTA = |\Delta V| = 0.1207$$

De la comparación entre $DELTA$ y $DV_{\max}$ se obtiene

$$DV_{\max} = 0.1207$$

La tabla 3.4 muestra un resumen de los resultados obtenidos hasta ahora y de la continuación del proceso dos iteraciones más

iteración $\rightarrow j$	1	2	3
$V_{2ac}^{(1)}$	$0.9466 - 0.1804i$	$1.0199 - 0.0563i$	$0.9977 + 0.0091i$
$V_{3ac}^{(1)}$	$0.9368 - 0.1547i$	$0.9921 - 0.0473i$	$0.9783 - 0.0187i$
$Q_{G4}^{(j)}$	3.8161	1.3271	1.4148
$A_4^{(j)}$	$0.0892 + 0.0403i$	$0.0307 + 0.052i$	$0.0328 + 0.0516i$
$V_{4ac}^{(1)}$	$1.0602 - 0.1126i$	$1.0590 + 0.035i$	$1.0233 + 0.0568i$
$DV_{\max}^{(j)}$	0.1207	0.1068	0.0493

Tabla 3.4: Resultados de la aplicación del Método de Gauss-Seidel al problema del Ejemplo 3.x

La convergencia se obtiene en la iteración 14 con el siguiente resultado final

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 1.0000 \angle 0^\circ \\ 0.9814 \angle -0.9668^\circ \\ 0.9678 \angle -1.8616^\circ \\ 1.0200 \angle 1.5235^\circ \end{bmatrix}$$

3.12 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

3.12.1 FORMULACIÓN PARA ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA

El conjunto de ecuaciones no lineales complejas (3.46) debe ser convertido en uno de ecuaciones escalares para lo cual se debe reemplazar cada una de las variables e incógnitas que intervienen en ella en su forma rectangular o polar. Como se verá, esta última ofrece muchas ventajas, razón por la que este enfoque es el más popular y el preferido en este documento. Se utiliza la siguiente notación:

$$\begin{aligned} V_k &= V_k e^{j\delta_k} = V_k (\cos \delta_k + j \operatorname{sen} \delta_k) = e_k + j f_k \\ Y_{ik} &= Y_{ik} e^{j\theta_{ik}} = Y_{ik} (\cos \theta_{ik} + j \operatorname{sen} \theta_{ik}) = G_{ik} + j B_{ik} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Reemplazando (3.58) en (3.46) se obtiene

$$P_{i\ esp} - j Q_{i\ esp} = V_i e^{-j\delta_i} \sum_{k=1}^N Y_{ik} e^{j\theta_{ik}} V_k e^{j\delta_k}$$

$$P_{i\ esp} - j Q_{i\ esp} = \sum_{k=1}^N V_i Y_{ik} V_k e^{j(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i)}$$

donde

$$\begin{aligned} P_{i\ esp} &= P_{Gi} - P_{Di} \\ Q_{i\ esp} &= Q_{Gi} - Q_{Di} \end{aligned} \quad (3.59)$$

y separando parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} P_{i\ esp} &= \sum_{k=1}^N V_i Y_{ik} V_k \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \\ Q_{i\ esp} &= \sum_{k=1}^N V_i Y_{ik} V_k \sen(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad i = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como el sistema de ecuaciones escalares (3.60) debe llevarse a la forma $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ y puesto que tanto $P_{i\ esp}$ como $Q_{i\ esp}$ son cantidades constantes todos los términos de la matriz Jacobiana son de la forma $\frac{\partial}{\partial x} \left[-\sum V_i Y_{ik} V_k \begin{Bmatrix} \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \\ \sen(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \end{Bmatrix} \right]$ donde x es una componente del *vector de incógnitas* que en este caso es

$$\vec{x} = [\delta_2 \ \delta_3 \ \dots \ \delta_N : V_2 \ V_3 \ \dots \ V_N]^T \quad (3.61)$$

El conjunto de ecuaciones lineales (3.39) en este caso toma la forma

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(j)} \\ \Delta P_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta P_N^{(j)} \\ \Delta Q_2^{(j)} \\ \Delta Q_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta Q_N^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_N} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_N}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial \delta_N} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_N} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial V_N} \\ \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial V_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial V_2} & \frac{\partial P_N}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial V_N} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial V_N} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial Q_3}{\partial V_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_N}{\partial V_3} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial V_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{(j)} \\ \Delta \delta_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_N^{(j)} \\ \left(\frac{\Delta V_2}{V_2} \right)^{(j)} \\ \left(\frac{\Delta V_3}{V_3} \right)^{(j)} \\ \vdots \\ \left(\frac{\Delta V_N}{V_N} \right)^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

donde los elementos de la matriz Jacobiana se evalúan en $\vec{x}^{(j)}$ y además

$$\begin{aligned} \Delta P_i^{(j)} &= P_{i \text{ esp}} - P_{i \text{ calc}}^{(j)} \\ \Delta Q_i^{(j)} &= Q_{i \text{ esp}} - Q_{i \text{ calc}}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
P_{i \text{ calc}}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N V_i^{(j)} Y_{ik} V_k^{(j)} \cos [\theta_{ik} + \delta_k^{(j)} - \delta_i^{(j)}] \\
Q_{i \text{ calc}}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N V_i^{(j)} Y_{ik} V_k^{(j)} \text{sen}(\delta_i^{(j)} - \delta_k^{(j)} - \theta_{ik})
\end{aligned} \tag{3.64}$$

y los elementos de la matriz Jacobiana se obtienen a partir de las derivadas parciales del segundo miembro de la ecuación (3.60) y se evalúan para las estimaciones vigentes de las variables del vector de incógnitas. Nótese que el primer miembro de (3.62) corresponde a la evaluación de $\vec{f}(\vec{x}^{(j)})$ con $\vec{x}$ definido en (3.61) y $\vec{f}$ en (3.60).

Por razones que serán obvias más adelante se acostumbra escribir (3.62) notando que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_i}{\partial V_k} \Delta V_k &= V_k \frac{\partial P_i}{\partial V_k} \left(\frac{\Delta V_k}{V_k} \right) \\
\frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \Delta V_k &= V_k \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \left(\frac{\Delta V_k}{V_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(j)} \\ \Delta P_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta P_N^{(j)} \\ \Delta Q_2^{(j)} \\ \Delta Q_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta Q_N^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial P_3}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_N}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial P_N}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial P_N}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial Q_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial Q_3}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial Q_3}{\partial V_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_3} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial \delta_N} & V_2 \frac{\partial Q_N}{\partial V_2} & V_3 \frac{\partial Q_N}{\partial V_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{(j)} \\ \Delta \delta_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_N^{(j)} \\ \Delta V_2^{(j)} \\ \Delta V_3^{(j)} \\ \vdots \\ \Delta V_N^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

donde los elementos de la matriz Jacobiana se evalúan en $\vec{x}^{(j)}$.

3.12.2 EXPRESIONES GENERALES PARA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ JACOBIANA

De acuerdo al ordenamiento de incógnitas dado en (3.61) se puede reescribir (3.65) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Delta \vec{P}_i^{(j)} \\ \Delta \vec{Q}_i^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H] & [N] \\ [J] & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{\delta}_k^{(j)} \\ \frac{\Delta \vec{V}_k^{(j)}}{V_k^{(j)}} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde

$$\begin{bmatrix} [H] = \left[\frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} \right] & [N] = \left[V_k \frac{\partial P_i}{\partial V_k} \right] \\ [J] = \left[\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} \right] & [L] = \left[V_k \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \right] \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

es la matriz Jacobiana

Cada submatriz incluye los casos de elementos diagonales ($k = i$) y los no diagonales ($k \neq i$), razón por la que es conveniente escribir el segundo miembro de (3.60) (que es al que se le toman las derivadas parciales) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k \neq i} V_i Y_{ik} V_k \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) + Y_{ii} V_i^2 \cos(\theta_{ii}) \\ Q_i &= \sum_{k \neq i} V_i Y_{ik} V_k \operatorname{sen}(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) + Y_{ii} V_i^2 \operatorname{sen}(-\theta_{ii}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.12.2.1 ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[H]$

$$V_i \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = V_i \sum_{k \neq i} Y_{ik} V_k \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i)$$

que coincide con la sumatoria en la segunda de las ecuaciones (3.68) cambiada de signo puesto que la función $\operatorname{sen} \alpha$ es impar. Haciendo uso de (3.58) y teniendo en cuenta que las derivadas parciales deben ser evaluadas en el punto o estimación de la solución [ver ecuación (3.64)] que se tiene

$$H_{ii} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = -Q_i^{(j)} - B_{ii} [V_i^{(j)}]^2 \quad k = i \quad (3.69)$$

Para obtener los elementos no diagonales debe tenerse en cuenta que para una valor particular de $k \neq i$ únicamente un sumando contiene δ_k . Es decir,

$$H_{ik} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = -V_i^{(j)} Y_{ik} V_k^{(j)} \text{sen} [\theta_{ik} + \delta_k^{(j)} - \delta_i^{(j)}] \quad (3.70)$$

3.12.2.2 ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[L]$

$$V_i \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{k \neq i} V_i Y_{ik} V_k \text{sen}(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) + 2Y_{ii} V_i^2 \text{sen}(-\theta_{ii})$$

que se puede comparar con el segundo miembro de la segunda de las ecuaciones (3.68) para obtener la siguiente expresión

$$L_{ii} = \left. V_i \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = Q_i^{(j)} - B_{ii} [V_i^{(j)}]^2 \quad k = i \quad (3.71)$$

Para obtener los elementos no diagonales debe tenerse en cuenta que para una valor particular de $k \neq i$ únicamente un sumando contiene V_k . Es decir,

$$L_{ik} = \left. V_k \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = V_k^{(j)} Y_{ik} V_i^{(j)} \text{sen} [\delta_i^{(j)} - \delta_k^{(j)} - \theta_{ik}] \quad (3.72)$$

Una comparación entre (3.70) y (3.72) permite concluir que los elementos no diagonales de la submatriz $[H]$ son exactamente iguales a los no diagonales de la submatriz $[L]$. Es decir,

$$H_{ik} = L_{ik} \quad (3.73)$$

3.12.2.3 ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[J]$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{k \neq i} V_i Y_{ik} V_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik})$$

que coincide con la sumatoria en la primera de las ecuaciones (3.68) puesto que la función $\cos \alpha$ es par. Haciendo uso de (3.58) y teniendo en cuenta que las derivadas parciales deben ser evaluadas en el punto o estimación de la solución [ver ecuación (3.64)] que se tiene

$$J_{ii} = \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = P_i^{(j)} - G_{ii} \left[V_i^{(j)} \right]^2 \quad k = i \quad (3.74)$$

Para obtener los elementos no diagonales debe tenerse en cuenta que para una valor particular de $k \neq i$ únicamente un sumando contiene δ_k . Es decir,

$$J_{ik} = \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} \right|_{\vec{x}^{(j)}} = - V_i^{(j)} Y_{ik} V_k^{(j)} \cos \left[\delta_i^{(j)} - \delta_k^{(j)} - \theta_{ik} \right] \quad (3.75)$$

3.12.2.4 ELEMENTOS DE LA MATRIZ $[N]$

$$V_i \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{k \neq i} V_i Y_{ik} V_k \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) + 2 Y_{ii} V_i^2 \cos(\theta_{ii})$$

que se puede comparar con el segundo miembro de la primera de las ecuaciones (3.68) para obtener la siguiente expresión

$$N_{ii} = V_i \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \bigg|_{\vec{x}^{(j)}} = P_{i \text{ calc}}^{(j)} + G_{ii} \left[V_i^{(j)} \right]^2 \quad k = i \quad (3.76)$$

Para obtener los elementos no diagonales debe tenerse en cuenta que para una valor particular de $k \neq i$ únicamente un sumando contiene V_k . Es decir,

$$N_{ik} = V_k \frac{\partial P_i}{\partial V_k} \bigg|_{\vec{x}^{(j)}} = V_k^{(j)} Y_{ik} V_i^{(j)} \cos \left[\theta_{ik} + \delta_k^{(j)} - \delta_i^{(j)} \right] \quad (3.77)$$

Una comparación entre (3.77) y (3.72) permite concluir que los elementos no diagonales de las submatrices $[J]$ y $[L]$ tienen los mismos valores correspondientes pero de signo contrario. Es decir,

$$N_{ik} = -J_{ik} \quad (3.78)$$

3.12.3 CONSIDERACIONES COMPUTACIONALES

Puesto que la evaluación de las funciones trigonométricas en un computador se hace mediante una expansión en series de potencias y para garantizar una buena precisión deben considerarse muchos términos, en vez de la ecuación (3.64) se utiliza su versión en coordenadas rectangulares. Es decir, reemplazando la versión en coordenadas rectangulares de las variables en (3.58) en (3.46) se obtiene:

$$P_{i \text{ esp}} - jQ_{i \text{ esp}} = (e_i - j f_i) \sum_{k=1}^N (G_{ik} + j B_{ik})(e_k + j f_k) \quad (3.79)$$

donde se mantiene la definición (3.59). Separando parte real e imaginaria en (3.79) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{i \text{ esp}} &= \sum_{k=1}^N \{(G_{ik}e_k - B_{ik}f_k)e_i + (B_{ik}e_k + G_{ik}f_k)f_i\} \\
Q_{i \text{ esp}} &= \sum_{k=1}^N \{(G_{ik}e_k - B_{ik}f_k)f_i - (B_{ik}e_k + G_{ik}f_k)e_i\} \quad (3.80)
\end{aligned}$$

Y evaluando el segundo miembro en (3.80) en los valores estimados para las variables

$$\begin{aligned}
P_{i \text{ calc}}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left[G_{ik}e_k^{(j)} - B_{ik}f_k^{(j)} \right] e_i^{(j)} + \left[B_{ik}e_k^{(j)} + G_{ik}f_k^{(j)} \right] f_i^{(j)} \right\} \\
Q_{i \text{ calc}}^{(j)} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left[G_{ik}e_k^{(j)} - B_{ik}f_k^{(j)} \right] f_i^{(j)} - \left[B_{ik}e_k^{(j)} + G_{ik}f_k^{(j)} \right] e_i^{(j)} \right\} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

Similarmente las expresiones en coordenadas rectangulares para evaluar los elementos no diagonales de las submatrices de la Jacobiana que se deben usar en vez de (3.70) y (3.76) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
H_{ik} &= a_k f_i - b_k e_i \\
N_{ik} &= a_k e_i + b_k f_i \quad (3.82)
\end{aligned}$$

donde

$$a_k + jb_k = \mathbf{Y}_{ik} \mathbf{V}_k = (G_{ik} + jB_{ik})(e_k + jf_k) \quad (3.83)$$

Es decir

$$\begin{aligned}
a_k^{(j)} &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{Y}_{ik} \mathbf{V}_k^{(j)} \right\} = G_{ik}e_k^{(j)} - B_{ik}f_k^{(j)} \\
b_k^{(j)} &= \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{Y}_{ik} \mathbf{V}_k^{(j)} \right\} = B_{ik}e_k^{(j)} + G_{ik}f_k^{(j)} \quad (3.84)
\end{aligned}$$

3.12.4 ALGORITMO 3.5

3.12.4.1 DATOS

Se supone que ya se han obtenido los elementos de la matriz admitancia de nodos $[Y]$ y se conoce el vector de las potencias especificadas obtenidas de (3.59)

$$\begin{bmatrix} P_{2\text{ esp}} & P_{3\text{ esp}} & \cdots & P_{N\text{ esp}} & Q_{2\text{ esp}} & Q_{3\text{ esp}} & \cdots & Q_{N\text{ esp}} \end{bmatrix},$$

la magnitud del voltaje en el nodo de referencia $V_{1\text{ esp}}$ y la tolerancia ϵ

- 1 Realizar estimación inicial de la solución

$$\begin{bmatrix} \delta_2^{(0)} & \delta_3^{(0)} & \cdots & \delta_N^{(0)} & V_2^{(0)} & V_3^{(0)} & \cdots & V_N^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

- 2 Inicializar contador de iteraciones $j = 0$.
- 3 Calcular potencias activas y reactivas calculadas $P_{i\text{ calc}}^{(j)}$ y $Q_{i\text{ calc}}^{(j)}$ utilizando la ecuación (3.81)
- 4 Aplicar (3.63) para calcular los $\Delta P_i^{(j)}$ y los $\Delta Q_i^{(j)}$ que equivalen a $\vec{f}(\vec{x}^{(j)})$ y al primer miembro de (3.65)
- 5 Verificar si se ha obtenido convergencia:

$$\left| \Delta P_i^{(j)} \right| \leq \epsilon \wedge \left| \Delta Q_i^{(j)} \right| \leq \epsilon \forall i \geq 2 \quad (85)$$

- 6 Calcular los elementos de la matriz Jacobiana aplicando (3.69), (3.71), (3.74) y (3.76) para los elementos diagonales y (3.83), (3.82), (3.78) y (3.73) para los no diagonales
- 7 Resolver el sistema lineal de ecuaciones (3.65). Los valores obtenidos para los $\Delta \delta_i^{(j)}$ son en radianes
- 8 Actualizar las estimaciones de las incógnitas

$$\begin{aligned} \delta_i^{(j+1)} &= \delta_i^{(j)} + \Delta \delta_i^{(j)} \\ V_i^{(j+1)} &= V_i^{(j)} \left[1 + \frac{\Delta V_i^{(j)}}{V_i^{(j)}} \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

- 9 Incrementar contador de iteraciones $j = j + 1$

10 Regresar a la instrucción 3

3.12.5 EJEMPLO 3.8

Aplicar el Método de Newton-Raphson a la solución del problema del ejemplo 3.7 (ver Figura 3.9 y Tabla 3.2) con los datos de barra de la tabla 3.5

i	Tipo	Generación		Demanda		Voltaje (p. u.)	
		$P_{Gi} (Mw)$	$Q_{Gi} (Mvar)$	$P_{Di} (Mw)$	$Q_{Di} (Mvar)$	$\hat{V}_i$	$\delta_i (^\circ)$
1	Ref			50	30.99	1	0°
2	Carga	0	0	170	105.35	0.9853	-0.9552°
3	Carga	0	0	200	123.94	0.9717	-1.7974°
4	Carga	318	191.32	80	49.58	1.0250	1.4840°

Tabla 3.5: Datos de barra para el ejemplo 3.4

Con los datos de la tabla 3.5 aplicando (3.59) se obtiene

$$\begin{aligned}
 P_{2\text{ esp}} &= -1.7 & Q_{2\text{ esp}} &= -1.0535 \\
 P_{3\text{ esp}} &= -2.0 & Q_{3\text{ esp}} &= -1.2394 \\
 P_{4\text{ esp}} &= 2.38 & Q_{4\text{ esp}} &= 1.4174
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

La estimación inicial de la solución es la sugerida en la tabla 3.3. es decir,

$$\begin{aligned}
 \delta_2^{(0)} &= -0.9552^\circ & V_2^{(0)} &= 0.9853 \\
 \delta_3^{(0)} &= -1.7974^\circ & V_3^{(0)} &= 0.9717 \\
 \delta_4^{(0)} &= 1.4840^\circ & V_4^{(0)} &= 1.0250
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Reemplazando (3.51) y (3.88) en (3.64) (o en (3.81) en un programa de computador) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_{2\text{ calc}}^{(0)} &= -1.6764 & Q_{2\text{ calc}}^{(0)} &= -1.0189 \\
 P_{3\text{ calc}}^{(0)} &= -1.9412 & Q_{3\text{ calc}}^{(0)} &= -0.9717 \\
 P_{4\text{ calc}}^{(0)} &= 2.358 & Q_{4\text{ calc}}^{(0)} &= 1.025
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Reemplazando (3.87) y (3.89) en (3.63) se obtiene

$$\Delta \vec{P}_i^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta P_2^{(0)} = -0.0237 \\ \Delta P_3^{(0)} = -0.0588 \\ \Delta P_4^{(0)} = 0.0220 \end{bmatrix} \quad \Delta \vec{Q}_i^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta Q_2^{(0)} = -0.0346 \\ \Delta Q_3^{(0)} = -0.0631 \\ \Delta Q_3^{(0)} = -0.0599 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Suponiendo una tolerancia $\epsilon = 0.001$ se nota de (3.90) que la condición (3.85) no se cumple.

3.12.6 CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE LAS SUBMATRICES DE LA JACOBIANA

Los elementos de la submatriz $[H]$ se obtienen aplicando (3.69) para los elementos diagonales y (3.83) y (3.82) para los no diagonales

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.5918 & 0.0000 & -25.8612 \\ 0.0000 & 39.8059 & -14.8645 \\ -26.3092 & -15.2085 & 41.5085 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Los elementos diagonales de la submatriz $[L]$ se obtienen aplicando (3.71) y los no diagonales aplicando (3.73)

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.5541 & 0.0000 & -25.8612 \\ 0.0000 & 37.4534 & -14.8645 \\ -26.3092 & -15.2085 & 44.4630 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Los elementos diagonales de la submatriz $[N]$ se obtienen aplicando (3.76) y los no diagonales aplicando (3.83) y (3.82)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.0470 & 0.0000 & -6.3345 \\ 0.0000 & 5.7944 & -3.8839 \\ -4.1233 & -2.1550 & 10.9659 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Los elementos diagonales de la submatriz $[J]$ se obtienen aplicando (3.74) y los no diagonales aplicando (3.78)

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.3997 & 0.0000 & 6.3345 \\ 0.0000 & -9.6768 & 3.8839 \\ 4.1233 & 2.1550 & -6.2499 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Reemplazando (3.90), (3.91), (3.92), (3.93) y (3.94) en (3.66) se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -0.0237 \\ -0.0588 \\ 0.0220 \\ -0.0346 \\ -0.0631 \\ -0.0599 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.59 & 0.00 & -25.86 & 7.05 & 0.00 \\ 0.00 & 39.81 & -14.86 & 0.00 & 5.79 \\ -26.31 & -15.21 & 41.51 & -4.12 & -2.16 \\ -10.40 & 0.00 & 6.33 & 42.55 & 0.00 \\ 0.00 & -9.68 & 3.88 & 0.00 & 37.45 \\ 4.12 & 2.16 & -6.25 & -26.31 & -15.21 \\ -6.33 \\ -3.88 \\ 10.97 \\ -25.86 \\ -14.86 \\ 44.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2^{(0)} \\ \Delta\delta_3^{(0)} \\ \Delta\delta_4^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)}/V_2^{(0)} \\ \Delta V_3^{(0)}/V_3^{(0)} \\ \Delta V_4^{(0)}/V_4^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

cuya solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_2^{(0)} &= -2.1327 \times 10^{-4} \text{ rad} & \frac{\Delta V_2^{(0)}}{V_2^{(0)}} &= -3.9143 \times 10^{-3} \\ \Delta\delta_3^{(0)} &= -1.1223 \times 10^{-3} \text{ rad} & \frac{\Delta V_3^{(0)}}{V_3^{(0)}} &= -3.9703 \times 10^{-3} \\ \Delta\delta_4^{(0)} &= 6.7077 \times 10^{-4} \text{ rad} & \frac{\Delta V_4^{(0)}}{V_4^{(0)}} &= -4.8529 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (96)$$

Reemplazando (3.88) y (3.96) en (3.86) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\delta_2^{(1)} &= -0.9672^\circ & V_2^{(1)} &= 0.9815 \\
\delta_3^{(1)} &= -1.8617^\circ & V_3^{(1)} &= 0.9678 \\
\delta_4^{(1)} &= 1.5225^\circ & V_4^{(1)} &= 1.0200
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Reemplazando (3.97) en (3.64)

$$\begin{aligned}
P_{2\text{ calc}}^{(1)} &= -1.6998 & Q_{2\text{ calc}}^{(1)} &= -1.0534 \\
P_{3\text{ calc}}^{(1)} &= -1.9997 & Q_{3\text{ calc}}^{(1)} &= -1.2392 \\
P_{4\text{ calc}}^{(1)} &= 2.3795 & Q_{4\text{ calc}}^{(1)} &= 1.4177
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Reemplazando (3.87) y (3.98) en (3.63) se obtiene

$$\Delta \vec{P}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta P_2^{(1)} = -0.0002 \\ \Delta P_3^{(1)} = -0.0003 \\ \Delta P_4^{(1)} = 0.0005 \end{bmatrix} \quad \Delta \vec{Q}_i^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta Q_2^{(1)} = -0.0001 \\ \Delta Q_3^{(1)} = -0.0002 \\ \Delta Q_4^{(1)} = -0.0003 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

que satisface el criterio de convergencia (3.85) para una tolerancia $\epsilon = 10^{-3}$

3.13 CRITERIO DE ACEPTACIÓN

Una vez se ha obtenido convergencia, independientemente del método de solución de (3.46), se debe realizar la siguiente secuencia para verificar que no es una solución extraña:

- 1 Calcular los flujos de potencia a través de todas las líneas:

$$\mathbf{S}_{pq} = \mathbf{V}_p \mathbf{I}_{pq}^* = \mathbf{V}_p \left(\mathbf{Y}_{sh,p} \mathbf{V}_p + \frac{\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_q}{\mathbf{Z}_{ser,pq}} \right)^* \quad p \neq q \tag{3.100}$$

notando que $\mathbf{S}_{pq} \neq \mathbf{S}_{qp}$

- 2 Calcular las pérdidas totales activas y reactivas en cada línea

$$\mathbf{S}_{L-pq} = \mathbf{S}_{pq} + \mathbf{S}_{qp} = P_{L-pq} + jQ_{L-pq}$$

$p - q$	1 - 2	1 - 3	2 - 4	3 - 4
$\mathbf{S}_{pq}$	$0.3874 + j0.2675$	$0.9817 + j0.6633$	$-1.3148 - j0.7475$	$-1.0286 - j0.5915$
$\mathbf{S}_{qp}$	$-0.3850 - j0.3059$	$-0.9711 - j0.6477$	$1.3323 + j0.7959$	$1.0472 + j0.6217$
$\mathbf{S}_{L-pq}$	$0.0024 + j0.0384$	$0.0106 + j0.0156$	$0.0175 + j0.0484$	$0.0186 + j0.0302$

Tabla 3.6: Flujos de potencia activa y reactiva en el sistema del ejemplo 3.8

- 3 Calcular las pérdidas activas totales

$$P_{LT} = \sum P_{L-pq}$$

- 4 Calcular la potencia activa de la barra oscilante P_{G1}

$$\mathbf{S}_1 = (P_{G1} - P_{D1}) + j(Q_{G1} - Q_{D1}) = \mathbf{V}_1 \left(\sum_{k=1}^N \mathbf{Y}_{1k} \mathbf{V}_k \right)^*$$

- 5 Calcular el desbalance de la potencia activa

$$Desb = \sum_i P_{Gi} - \sum_i P_{Di} - \sum P_{L-pq} \quad (3.101)$$

Si es pequeño la solución es aceptable (ver Capítulo 2 Sección 2.?)

Nótese que el anterior criterio equivale a que el valor de la potencia activa generada en la barra oscilante calculada haciendo $Desb = 0$ en (3.101) coincida con el obtenido aplicando directamente la primera de las ecuaciones (3.13)

3.13.1 EJEMPLO 3.9

La tabla 3.6 muestra los flujos de potencia en tanto por uno a través de los sistemas de transmisión obtenidos aplicando (3.100) con los datos de línea de la tabla 3.2 y los valores en (3.97)

Mediante cualquiera de las ecuaciones (3.46) con $i = 1$ se calcula la potencia generada en la barra oscilante

$$P_{G1} = 186.9067 \text{ Mw} \quad Q_{G1} = 124.0725 \quad (3.102)$$

Este resultado para P_{G1} debe ser igual al obtenido mediante la ecuación del equilibrio de potencias lo que equivale a reemplazar (3.102) en (3.101) para obtener:

$$Desb = \sum_i P_{Gi} - \sum_i P_{Di} - \sum P_{L-pq} = -0.0002$$

3.14 REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMADORES

Un transformador provisto de derivaciones en uno de sus lados para permitir pequeños ajustes ($\pm 10\%$) en la magnitud del voltaje se puede representar mediante su impedancia (o admitancia) nominal⁸ en serie con un autotransformador (o transformador) ideal⁹, como muestra la Figura 3.10. Nótese que en este caso la admitancia en tanto por uno se ha colocado en el lado del cambio de derivaciones y que la relación de transformación se expresa como $1 : t$.

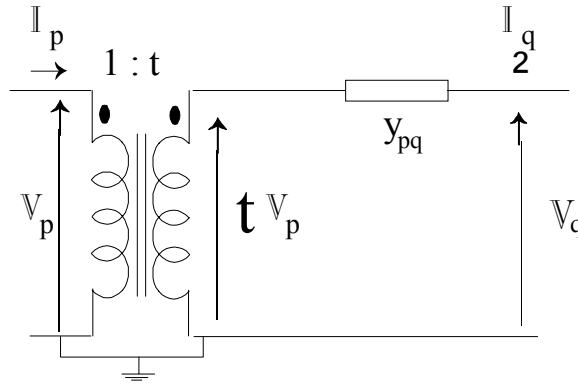


Figura 3.10. Representación del transformador con su admitancia en el lado de las derivaciones y relación de transformación $1 : t$

A partir de este modelo se puede obtener un circuito π equivalente como el de la Figura 3.11(a) para representar el transformador en estudios de flujos de carga. Los parámetros se obtienen igualando las corrientes terminales de ambas representaciones. Es decir,

Para el circuito de la Figura 3.10

$$\begin{aligned} V_p I_p^* &= -t V_p I_q^* \\ I_q &= y_{pq} (V_q - t V_p) \end{aligned} \quad (3.103)$$

⁸ La obtenida cuando la posición de la derivación es la nominal

⁹ Este modelo también es válido para representar los transformadores regulantes de potencia activa o desplazadores de fase cuanto t es complejo de magnitud unitaria

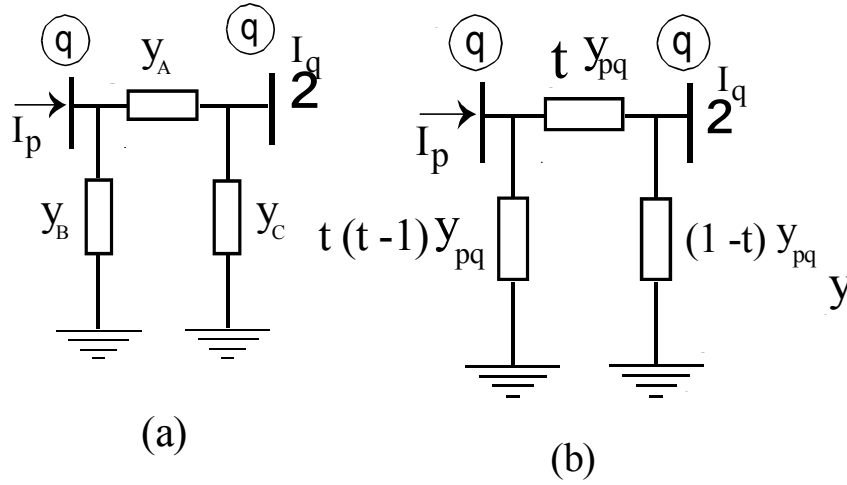


Figura 3.11. Circuito equivalente π del transformador con derivaciones de la Figura 3.9 en términos de su admitancia nominal y de la relación de transformación

Combinando las ecuaciones (3.103) se obtiene:

$$I_p = -t^* I_q = -t^* (V_q - t V_p) y_{pq} \quad (3.104)$$

Para el circuito de la Figura 3.11(a) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_p &= y_B V_p + y_A (V_p - V_q) \\ I_q &= y_C V_q - y_A (V_p - V_q) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Para que las expresiones (3.104) y (3.103)(b) conduzcan a idénticos resultados que (3.105) se debe cumplir

$$\begin{aligned} t t^* y_{pq} &= y_B + y_A \\ t^* y_{pq} &= y_A \\ y_{pq} &= y_C + y_A \end{aligned} \quad (3.106)$$

Resolviendo (3.106) se obtienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
y_A &= t^* y_{pq} \\
y_B &= t^* (t - 1) y_{pq} \\
y_C &= (1 - t^*) y_{pq}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

que corresponden con los del circuito equivalente de la Figura 3.11(b) para el caso particular $t = t^*$

Algunos autores ubican la admitancia en el lado opuesto al del cambio de derivaciones y la relación de transformación la denominan $1 : a$ como en el de la Figura 3.12. En este caso fácilmente se pueden establecer las siguientes expresiones:

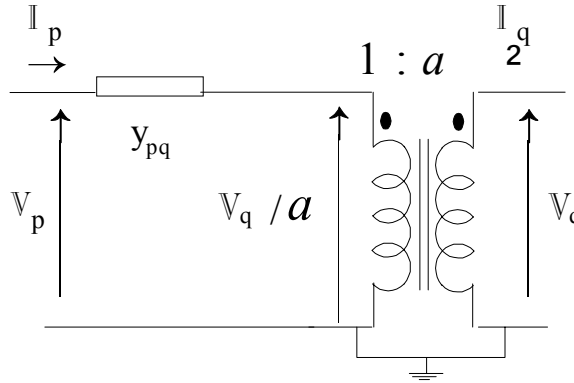


Figura 3.12. Representación del transformador con su admitancia en el lado opuesto al de las derivaciones y relación de transformación $1 : a$

$$\begin{aligned}
\frac{V_q}{a} I_p^* &= -V_q I_q^* \\
I_p &= \left(V_p - \frac{V_q}{a} \right) y_{pq}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Reemplazando (3.108)(a) en (3.108)(b) y simplificando se obtiene:

$$I_q = -\frac{I_p}{a^*} = -\frac{1}{a^*} \left(V_p - \frac{V_q}{a} \right) y_{pq} \tag{109}$$

Para que las expresiones (3.108)(b) y (3.109) sean equivalentes a (3.105) se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
 y_B + y_A &= y_{pq} \\
 y_A &= \frac{y_{pq}}{a} \\
 y_C + y_A &= \frac{y_{pq}}{a^* a}
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Resolviendo (3.110) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y_A &= \frac{y_{pq}}{a} \\
 y_B &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) y_{pq} \\
 y_C &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^*} - 1\right) y_{pq}
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

que corresponde al circuito de la Figura 3.13 para el caso en que $a = a^*$

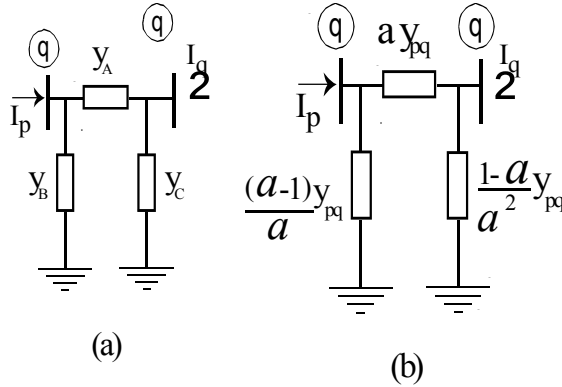


Figura 3.13. Circuito equivalente π del transformador con derivaciones de la Figura 3.12 en términos de su admitancia nominal y de la relación de transformación

Los estudios de flujos de potencia cuando la relación de transformación es constante, es decir, cuando se ha fijado el tap de derivación, es suficiente tener en cuenta su correspondiente modelo de circuito en la formación de la matriz admitancia de nodos, ya que en este caso el parámetro a se le puede considerar como independiente

En los estudios de flujos de carga de sistemas que incluyen transformadores que cambian la posición de sus derivaciones bajo carga (TCUL: Tap Changing Under Load) se forma previamente una matriz admitancia de nodos que los ignora. La barra a la

que está conectado el devanado con las derivaciones se considera como de voltaje controlado y por lo tanto su voltaje se especifica y el parámetro t se debe incluir en las variables de estado y en cada iteración modificar tanto los elementos pertinentes de la matriz admitancia de nodos como los de la matriz Jacobiana. En algunos estudios la variable de derivación t se considera como una variable de control independiente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] EL-ABIAD Ahmed H. y Glenn W. STAGG, “*Computer Methods in Power System Analysis*”, McGraw-Hill, New York, 1968
- [2] ELGERD Olle I., “*Electric Energy Systems Theory: An Introduction*”, McGraw-Hill, New York, 1971
- [3] GRAINGER Jhon J. y William D. STEVENSON, “*Análisis de Sistemas de Potencia*”, McGraw-Hill, Méxco, 1996
- [4] TINNEY William F. y Clifford E. HART, “*Power Flow Solution by Newton’s Method*”, IEEE transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 86 N°11, November 1967

Capítulo 4

ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO

4.1 OBJETIVO

Derivar y justificar métodos sistemáticos para obtener las respuestas (corrientes y voltajes) de régimen sinusoidal permanente que se presentan en un sistema eléctrico de potencia trifásico, balanceado y simétrico cuando en una localización geográfica de éste (identificada mediante la letra P) se introduce un fallo paralelo (desequilibrio), cuyo diagrama general se muestra en la Figura 4.1, donde se han designado y definido los *sentidos de referencia* (interpretación para los valores positivos) *para las corrientes y voltajes en el punto de fallo*.¹⁰

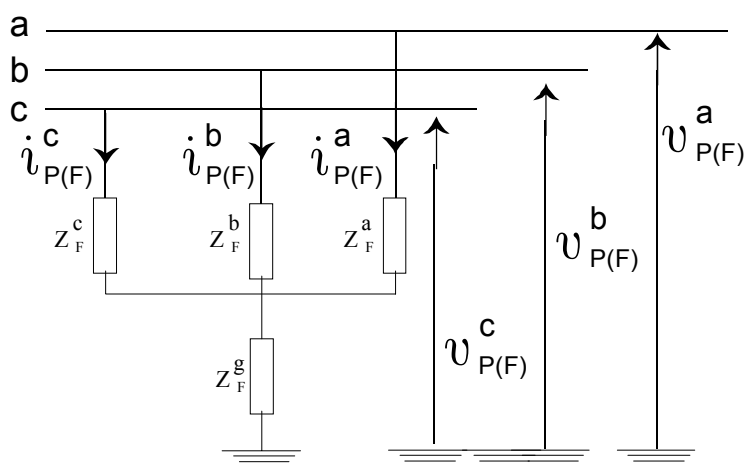


Figura 4.1. Diagrama de circuito de un fallo paralelo general

¹⁰ No se consideran los fallos tipo serie que ocurren cuando se desbalancean las impedancias de la línea y no implican interconexiones entre fases, ni de éstas con el neutro.

4.2 NOTACIÓN

Cada localización geográfica o “nodo” se identifica mediante un número diferente. Al nodo de referencia se le asigna el cero.

Cada sistema de transmisión (elemento) se identifica mediante los nodos entre los cuales está conectado (p - q , por ejemplo).

$$\vec{v}_{pq}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} v_{pq}^a \\ v_{pq}^b \\ v_{pq}^c \end{bmatrix} \quad \text{denota las caídas de voltaje en las tres fases del elemento } p\text{-}q$$

$$\vec{i}_{pq}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} i_{pq}^a \\ i_{pq}^b \\ i_{pq}^c \end{bmatrix} \quad \text{identifica las corrientes en las tres fases del elemento } p\text{-}q$$

$$z_{pq,pq}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad z_{pq,rs}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} z_{a\alpha} & z_{a\beta} & z_{a\gamma} \\ z_{b\alpha} & z_{b\beta} & z_{b\gamma} \\ z_{c\alpha} & z_{c\beta} & z_{c\gamma} \end{bmatrix}$$

son, respectivamente la matriz impedancia propia del elemento p - q y la matriz impedancia mutua entre este sistema de transmisión con fases designadas mediante las letras a , b y c y el conectado entre los nodos r y s , cuyas fases se identifican mediante las letras α , β y γ .

Los voltajes y corrientes de fallo se distinguen en este trabajo mediante el *subíndice* (F) y las bajo condiciones normales o de prefallo mediante el *subíndice* (0) .

Se puede demostrar que *independientemente del número de conductores por fase y de cables guarda siempre es posible obtener una matriz de (3×3) que relacione las caídas de voltaje en las tres fases con las corrientes a través de ellas*. Si dos sistemas de transmisión van montados sobre la misma torre compartiendo por lo menos durante un trayecto el “derecho a la vía” se puede obtener para el conjunto una matriz de impedancias mutuas entre las fases de una y cada una de las de la otra. Se puede plantear entonces la siguiente ecuación primitiva:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_{pq}^{a,b,c} \\ \vec{v}_{rs}^{a,b,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{pq,pq}^{a,b,c} & z_{pq,rs}^{a,b,c} \\ z_{rs,pq}^{a,b,c} & z_{rs,rs}^{a,b,c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_{pq}^{a,b,c} \\ \vec{i}_{rs}^{a,b,c} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.3 ANÁLISIS DE SISTEMAS TRIFÁSICOS

- I El conjunto de ecuaciones linealmente independiente que describe completamente el comportamiento en el estado estacionario de los sistemas trifásicos (simétricos o nó) excitados mediante fuentes sinusoidales (balanceadas o desbalanceadas) se puede obtener mediante cualquiera de los métodos de la teoría de circuitos, es decir como un circuito de mayor tamaño. Sin embargo, algunas simplificaciones se pueden hacer eligiendo las tres fases de un mismo elemento (sistema de transmisión o generador) como ramas o todas como enlaces, aplicando las leyes de Kirchhoff a cada una de las tres fases y agrupando adecuadamente las ecuaciones que resultan, lo cual es equivalente a introducir la nomenclatura matricial y tener en cuenta los requerimientos de conformabilidad en la multiplicación de matrices que, como se recuerda, no es conmutativa.

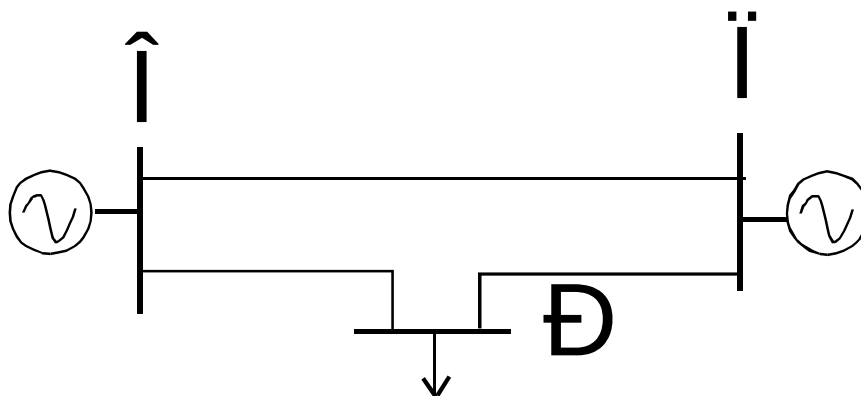


Figura 4.2. Diagrama unifilar de un sistema trifásico

Así, por ejemplo, la Figura 4.2 muestra el diagrama unifilar de un sistema trifásico y su correspondiente representación de circuito se muestra en la Figura 4.3.

El conjunto linealmente independiente de ecuaciones que describe completamente su comportamiento *en función de corrientes de enlace* de acuerdo al gráfico orientado de la Figura 4.4 es el siguiente:

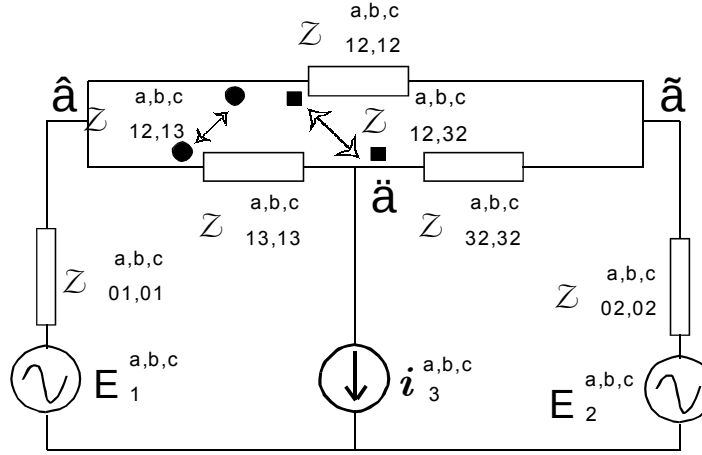


Figura 4.3. Representación circuital del sistema eléctrico trifásico de la Figura 4.2

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1^{a,b,c} &= \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_{12}^{a,b,c} + \\
 &\quad \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{13,13}^{a,b,c} + z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_{13}^{a,b,c} - \left(z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_3^{a,b,c} + \vec{E}_2^{a,b,c} \\
 \vec{E}_1^{a,b,c} &= \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,12}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_{12}^{a,b,c} + \\
 &\quad \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_{13}^{a,b,c} - \left(z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) \vec{i}_3^{a,b,c} + \vec{E}_2^{a,b,c}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aunque (4.2) representa un conjunto de 6 ecuaciones simultáneas cuya solución se puede hallar por cualquiera de los métodos algebraicos conocidos, se acostumbra mantener la partición o separación sugerida y resolverlas pre y posmultiplicando por matrices (de 3 x 3) y sus inversas como se ilustra a continuación.

Se puede aplicar el teorema de superposición y suponer inicialmente nulas las fems de los generadores. Es decir, haciendo $\vec{E}_1^{a,b,c} = \vec{E}_2^{a,b,c} = \vec{0}$ y definiendo

$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{pmatrix} z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,12}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix} & [B] &= \begin{pmatrix} z_{01,01}^{a,b,c} + z_{13,13}^{a,b,c} + z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix} \\
 [C] &= \begin{pmatrix} z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,12}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix} & [D] &= \begin{pmatrix} z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \\ z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix} \\
 [E] &= \begin{pmatrix} z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix} & [F] &= \begin{pmatrix} z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

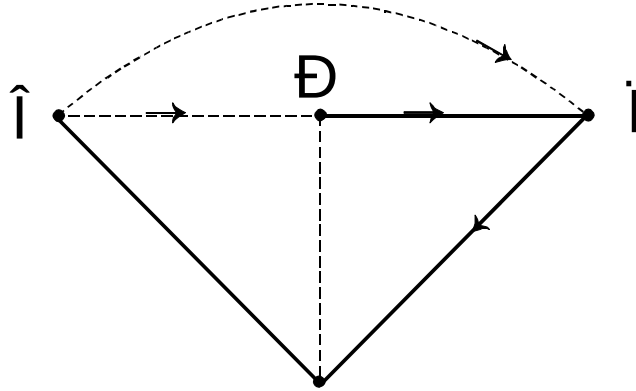


Figura 4.4. Gráfico orientado del circuito de la Figura 4.3

(4.2) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [A] \vec{i}_{12}^{a,b,c} + [B] \vec{i}_{13}^{a,b,c} &= [E] \vec{i}_3^{a,b,c} \\ [C] \vec{i}_{12}^{a,b,c} + [D] \vec{i}_{13}^{a,b,c} &= [F] \vec{i}_3^{a,b,c} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Premultiplicando la primera de las ecuaciones (4.4) por $[A]^{-1}$ se obtiene:

$$\vec{i}_{12}^{a,b,c} = [A]^{-1} \left([E] \vec{i}_3^{a,b,c} - [B] \vec{i}_{13}^{a,b,c} \right) \quad (4.5)$$

Reemplazando (4.5) en la segunda de las ecuaciones (4.4) se obtiene

$$([D] - [C][A]^{-1}[B]) \vec{i}_{13}^{a,b,c} = ([F] - [C][A]^{-1}[E]) \vec{i}_3^{a,b,c} \quad (4.6)$$

Una vez se resuelve (4.6) se reemplaza en (4.5) y se obtiene la solución a (4.4) que es la respuesta debido a la fuente de corriente $\vec{i}_3^{a,b,c}$

La respuesta debido a las fuentes de voltaje se obtiene suponiendo nula la fuente de corriente $\vec{i}_3^{a,b,c} = \vec{0}$ en cuyo caso (4.2) se puede reescribir manteniendo las definiciones (4.3)

$$\begin{aligned}
[A] \vec{i}_{12}^{a,b,c} + [B] \vec{i}_{13}^{a,b,c} &= \vec{E}_1^{a,b,c} - \vec{E}_2^{a,b,c} \\
[C] \vec{i}_{12}^{a,b,c} + [D] \vec{i}_{13}^{a,b,c} &= \vec{E}_1^{a,b,c} - \vec{E}_2^{a,b,c}
\end{aligned} \quad (4.7)$$

que se puede resolver mediante un procedimiento similar.

En estudios de corto circuito la solución de (4.7) constituye la respuesta bajo condiciones balanceadas, es decir, las corrientes de prefallo que generalmente se desprecian por ser relativamente pequeñas con respecto a las debidas a la fuente de corriente que surge de aplicar el teorema de sustitución al fallo paralelo después de que se ha calculado la corriente a través de éste obteniendo el equivalente de Thévenin del circuito de prefallo. Nótese sin embargo, que la justificación de esta suposición no es que $\vec{E}_1^{a,b,c} = \vec{E}_2^{a,b,c} = \vec{0}$ sino que $\vec{E}_1^{a,b,c} \simeq \vec{E}_2^{a,b,c}$ lo que si es aproximadamente cierto. Vale la pena destacar que aunque la última condición significa corrientes nulas debidas a las fems de los generadores, los voltajes de nodo son diferentes de cero e iguales al valor de la fem de cualquiera de ellos.

4.3.1 EJEMPLO 1

Los elementos de un sistema trifásico cuyo diagrama unifilar es como el de la Figura 4.2 tiene las características que se detallan en la Tabla 4.1

$p-q$	$z_{pq,pq}^{a,b,c}$						$r-s$	$z_{pq,rs}^{a,b,c}$																							
$0-1$	<table><tr><td>0.08</td><td>- 0.0225</td><td>- 0.0225</td></tr><tr><td>- 0.0225</td><td>0.08</td><td>- 0.0225</td></tr><tr><td>- 0.0225</td><td>- 0.0225</td><td>0.08</td></tr></table>						0.08	- 0.0225	- 0.0225	- 0.0225	0.08	- 0.0225	- 0.0225	- 0.0225	0.08																
0.08	- 0.0225	- 0.0225																													
- 0.0225	0.08	- 0.0225																													
- 0.0225	- 0.0225	0.08																													
$1-2$	<table><tr><td>1.5</td><td>0.5</td><td>0.5</td></tr><tr><td>0.5</td><td>1.5</td><td>0.5</td></tr><tr><td>0.5</td><td>0.5</td><td>1.5</td></tr></table>						1.5	0.5	0.5	0.5	1.5	0.5	0.5	0.5	1.5																
1.5	0.5	0.5																													
0.5	1.5	0.5																													
0.5	0.5	1.5																													
$1-3$	<table><tr><td>0.6</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.6</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.6</td></tr></table>						0.6	0.2	0.2	0.2	0.6	0.2	0.2	0.2	0.6	$1-2$	<table><tr><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr></table>						0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.6	0.2	0.2																													
0.2	0.6	0.2																													
0.2	0.2	0.6																													
0.2	0.2	0.2																													
0.2	0.2	0.2																													
0.2	0.2	0.2																													
$3-2$	<table><tr><td>0.9</td><td>0.3</td><td>0.3</td></tr><tr><td>0.3</td><td>0.9</td><td>0.3</td></tr><tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.9</td></tr></table>						0.9	0.3	0.3	0.3	0.9	0.3	0.3	0.3	0.9	$1-2$	<table><tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.3</td></tr><tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.3</td></tr><tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.3</td></tr></table>						0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
0.9	0.3	0.3																													
0.3	0.9	0.3																													
0.3	0.3	0.9																													
0.3	0.3	0.3																													
0.3	0.3	0.3																													
0.3	0.3	0.3																													
$0-2$	$z_{01,01}^{a,b,c}$																														

Tabla 4.1: Caracterización de los elementos trifásicos del sistema del ejemplo 1

Obtener $\vec{i}_{12}^{a,b,c}$ e $\vec{i}_{13}^{a,b,c}$ para los siguientes valores de excitación

$$\vec{i}_3^{a,b,c} = -I_s^{a,b,c} \quad E_1^{a,b,c} = E_1^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (4.8)$$

Nótese que a la fuente de corriente no se le asigna un valor particular o específico. Por razones que serán evidentes más adelante se prefiere dejarla como un valor simbólico

Puesto que se cumple la condición $\vec{E}_1^{a,b,c} = \vec{E}_2^{a,b,c}$ la contribución de las fems de los generadores a las corrientes es nula. Por lo tanto (4.3), (4.6) y (4.5) se pueden aplicar secuencialmente.

Con los valores de la Tabla 4.1 sustituidos en (4.3) y reemplazando en (4.6) se obtiene:

$$\vec{i}_{13}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 0.5898598 & 0.0041667 & 0.0041667 \\ 0.0041667 & 0.5898598 & 0.0041667 \\ 0.0041667 & 0.0041667 & 0.5898598 \end{bmatrix} \vec{i}_3^{a,b,c} \quad (4.9)$$

y substituyendo (4.9) en (4.5)

$$\vec{i}_{12}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} -0.01111 & 0.0047979 & 0.0047979 \\ 0.0047979 & -0.01111 & 0.0047979 \\ 0.0047979 & 0.0047979 & -0.01111 \end{bmatrix} \vec{i}_3^{a,b,c} \quad (4.10)$$

4.4 CLASIFICACIÓN DE FALLOS TIPO PARALELO

Dependiendo de los valores que tomen las impedancias de la figura 4.1 se pueden simular los tipos de fallo que se muestran en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4

Recuérdese que en el análisis de sistemas eléctricos de potencia siempre se supone que la tierra es una esfera metálica conductora muy grande cuyos puntos están al mismo potencial (igual a cero), idéntico al del neutro únicamente bajo condiciones balanceadas.

Nótese que aunque la impedancia de fallo $z_F^{a,b,c}$ no está definida para los tipos de fallo que no incluyen la tierra, *la matriz admitancia de fallo siempre está definida y se obtiene resolviendo las ecuaciones linealmente independientes que resultan de aplicar las leyes de Kirchhoff a las condiciones de frontera.*

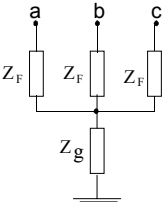
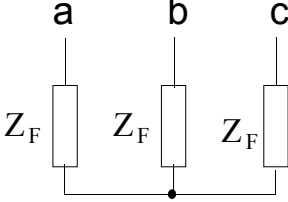
DIAGRAMA			
DESIGNACIÓN	Trifásico a tierra o LLL-G		Trifásico o LLL
$[z_F^{a,b,c}]$	$\begin{bmatrix} (z_F + z_g) & z_g & z_g \\ z_g & (z_F + z_g) & z_g \\ z_g & z_g & (z_F + z_g) \end{bmatrix}$		No definida
$[y_F^{a,b,c}] = [z_F^{a,b,c}]^{-1}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{bmatrix} (y_0 + 2y_F) & (y_0 - y_F) & (y_0 - y_F) \\ (y_0 - y_F) & (y_0 + 2y_F) & (y_0 - y_F) \\ (y_0 - y_F) & (y_0 - y_F) & (y_0 + 2y_F) \end{bmatrix}$	$\frac{y_F}{3}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Tabla 4.2: Caracterización de los fallos paralelo LLL-G y LLL

Así, por ejemplo, la simple inspección de las condiciones de frontera de la figura 4.5 permite plantear las siguientes ecuaciones:

$$i_{P(F)}^b = -i_{P(F)}^c \quad v_{P(F)}^a = z_g i_{P(F)}^a \quad v_{P(F)}^b - v_{P(F)}^c = z_F i_{P(F)}^b \quad (4.11)$$

Las ecuaciones (4.11) se pueden reescribir utilizando notación matricial así:

$$\begin{aligned}
 \vec{i}_{P(F)}^{a,b,c} &= \begin{bmatrix} i_{P(F)}^a \\ i_{P(F)}^b \\ i_{P(F)}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_F} & -\frac{1}{z_F} \\ 0 & -\frac{1}{z_F} & \frac{1}{z_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{P(F)}^a \\ v_{P(F)}^b \\ v_{P(F)}^c \end{bmatrix} \\
 &= [Y_F^{a,b,c}] \vec{v}_{P(F)}^{a,b,c}
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

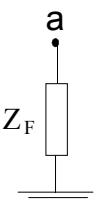
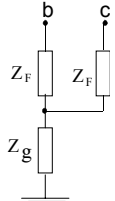
DIAGRAMA		
DESIGNACIÓN	Línea-tierra: L-G	Doble línea-tierra: LL-G
$[z_F^{a,b,c}]$	$\begin{bmatrix} z_F & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & (z_F + z_g) & z_g \\ 0 & z_g & (z_F + z_g) \end{bmatrix}$
$[y_F^{a,b,c}] = [z_F^{a,b,c}]^{-1}$	$\begin{bmatrix} y_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_F + z_g}{z_F^2 + 2 z_F z_g} & \frac{-z_g}{z_F^2 + 2 z_F z_g} \\ 0 & \frac{-z_g}{z_F^2 + 2 z_F z_g} & \frac{z_F + z_g}{z_F^2 + 2 z_F z_g} \end{bmatrix}$

Tabla 4.3: Caracterización de los fallos paralelo L-G y LL-G

4.5 FALLOS EN SISTEMAS TRIFÁSICOS EN FUNCIÓN DE CANTIDADES DE FASE

4.5.1 PROCEDIMIENTO GENERAL

El procedimiento para calcular las respuestas (corrientes y voltajes) que se presentan en el estado estacionario en un sistema eléctrico de potencia cuando en un punto o localización geográfica de éste, que se identifica mediante la letra P , se introduce un desbalance (fallo) paralelo consta de las siguientes etapas:

- I Se halla un equivalente de Thévenin del circuito de prefallo entre el punto P y el de referencia, como el mostrado en la Figura 4.6. Más adelante se aclara en detalle el proceso
- II Se obtiene la matriz admitancia de fallo $[Y_F^{a,b,c}]$ (que, como se mencionó antes, siempre está definida y se obtiene a partir de conjunto linealmente independiente de ecuaciones que resulta de aplicar las leyes de Kirchhoff a las condiciones de frontera) y se conecta ésta al equivalente de Thévenin obtenido en la etapa anterior como muestra la

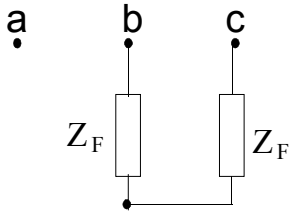
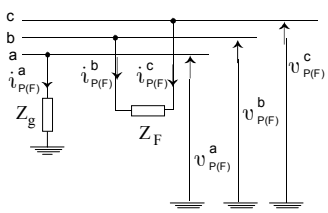
DIAGRAMA		
DESIGNACIÓN	Línea-línea: LL	Simultáneo L-G y LL
$z_F^{a,b,c}$	No definida	No definida
$[y_F^{a,b,c}] = [z_F^{a,b,c}]^{-1}$	$\frac{y_F}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{z_g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_F} & -\frac{1}{z_F} \\ 0 & -\frac{1}{z_F} & \frac{1}{z_F} \end{bmatrix}$

Tabla 4.4: Caracterización de los fallos paralelo LL y simultáneo L-G y LL

Figura 4.6, de cuya inspección se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P(F)}^{a,b,c} &= \vec{V}_{th}^{a,b,c} - [Z_{th}^{a,b,c}] \vec{i}_{P(F)}^{a,b,c} \\ \vec{i}_{P(F)}^{a,b,c} &= [Y_F^{a,b,c}] \vec{v}_{P(F)}^{a,b,c}\end{aligned}\quad (4.13)$$

- III Se obtiene la corriente total a través del fallo $\vec{i}_{P(F)}^{a,b,c}$ y el voltaje en el punto de fallo $\vec{v}_{P(F)}^{a,b,c}$ resolviendo (4.13)

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P(F)}^{a,b,c} &= \left([U] + [Z_{th}^{a,b,c}] [Y_F^{a,b,c}] \right)^{-1} \vec{V}_{th}^{a,b,c} \\ \vec{i}_{P(F)}^{a,b,c} &= [Y_F^{a,b,c}] \left([U] + [Z_{th}^{a,b,c}] [Y_F^{a,b,c}] \right)^{-1} \vec{V}_{th}^{a,b,c}\end{aligned}\quad (4.14)$$

donde $[U]$ es la matriz idéntica de orden 3

- IV Se reemplaza el fallo por una fuente de corriente de valor $\vec{i}_{P(F)}^{a,b,c}$ (teorema de sustitución) y se resuelve el circuito resultante. Nótese que si se aplica el teorema de superposición, las respuestas debidas a las fems de los generadores cuando actúan solas son las de prefallo, y que este circuito se debe resolver cuando se halla el $\vec{V}_{th}^{a,b,c}$. Las corrientes debidas al fallo se obtienen entonces aplicando a una red de elementos pasivos (en la que se han cortocircuitado las fems de los generadores) una fuente de corriente trifásica entre el punto de fallo y la referencia de valor $\vec{i}_{P(F)}^{a,b,c}$ obtenida de (4.14). Las solución a este último circuito ya se tendrían si cuando se halló la impedancia de Thévenin se hubiera aplicado una fuente de corriente. entre la referencia y el punto de fallo $\vec{I}_S^{a,b,c}$ y

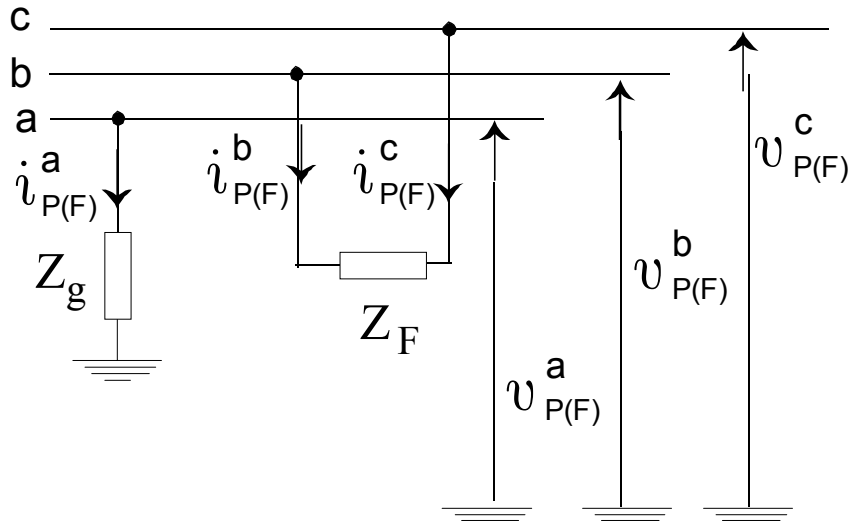


Figura 4.5. Desbalance paralelo para ilustrar el método general de obtener la matriz admitancia de fallo $y_F^{a,b,b}$

se hubieran hallado sus respuestas en función de ésta.

4.5.2 EQUIVALENTE DE THÉVENIN DEL CIRCUITO DE PREFALLO

- 1 Se debe plantear y resolver el conjunto de ecuaciones linealmente independientes que describen completamente el comportamiento del sistema en condiciones de pre-fallo. A partir de ellas se debe obtener el voltaje de Thévenin $\vec{V}_{th}^{a,b,c}$ que es igual al de prefallo en el punto o localización geográfica P donde ocurre el desbalance, $\vec{V}_{P0}^{a,b,c}$
- 2 Para obtener la impedancia de Thévenin del sistema de prefallo se requiere hacer nulas las fems de los generadores, aplicar una excitación trifásica entre la referencia y cada una de las fases en el punto de fallo P , plantear el conjunto de ecuaciones linealmente independientes que describe completamente el comportamiento del circuito resultante, resolverlo y obtener expresiones para:
 - a El voltaje $V_{P0}^{a,b,c}$ a través de la red de elementos pasivos cuando se aplica entre la referencia y cada fase una fuente independiente de corriente $I_S^{a,b,c}$. Es decir,

$$V_{P0}^{a,b,c} = Z_{th}^{a,b,c} I_S^{a,b,c}$$

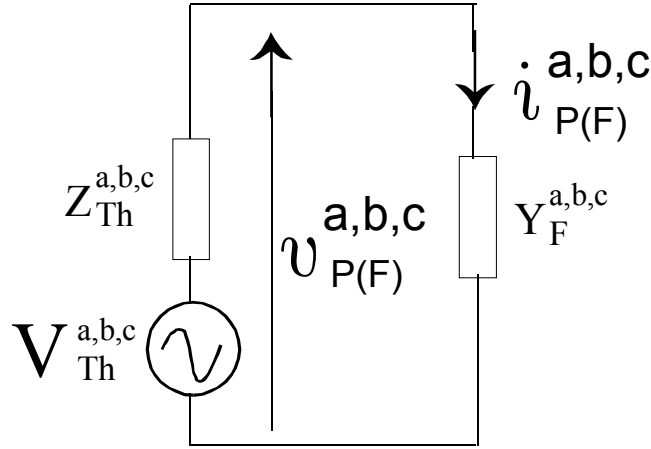


Figura 4.6. Equivalente de Thévenin del circuito de prefallo conectado a través de una admittancia de fallo

- b La corriente a través de la red de elementos pasivos $I_{P0}^{a,b,c}$ cuando se aplica entre la referencia y cada fase una fuente independiente de voltaje $V_S^{a,b,c}$. Es decir,

$$I_{P0}^{a,b,c} = Y_{th}^{a,b,c} V_S^{a,b,c}$$

$$Y_{th}^{a,b,c} = \left[Z_{th}^{a,b,c} \right]^{-1}$$

Nótese que en ambos casos el sentido de referencia de la corriente es en el de la caída de tensión a través de la red de elementos pasivos.

4.5.3 EJEMPLO 2

La figura 4.7 ilustra el diagrama unifilar de un sistema eléctrico de potencia cuyos elementos se caracterizan de acuerdo a los datos de la Tabla 4.1. Cuando opera en vacío (sin cargas conectadas a los nodos), se introduce en la barra 3 un desbalance paralelo como el de la figura 4.5, consistente en una resistencia entre la fase a y tierra ($\hat{z}_g = 0.1 \text{ p.u.}$) y de una reactancia inductiva entre las fases b y c ($\hat{z}_F = j 0.1 \text{ p.u.}$). Hallar $\vec{i}_{12(F)}^{a,b,c}$ e $\vec{i}_{13(F)}^{a,b,c}$

De los valores dados a las fuerzas electromotrices de los generadores en la ecuación (4.8) se sigue que

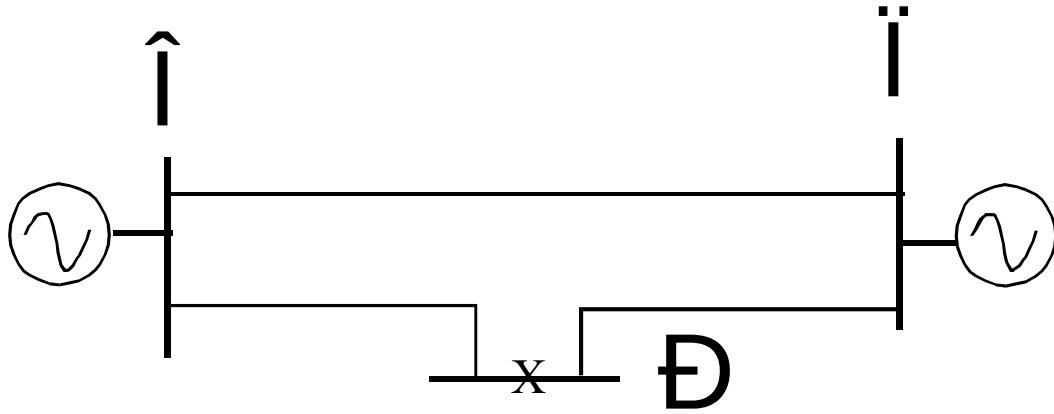


Figura 4.7. Diagrama unifilar del sistema del ejemplo 2

$$V_{th}^{a,b,c} = V_{3(0)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (4.15)$$

Para obtener $[Z_{th}^{a,b,c}]$ se deben suponer nulas las fems de los generadores, excitar mediante una fuente de corriente trifásica $\vec{I}_S^{a,b,c}$ entre la referencia y el nodo 3 y hallar el voltaje $\vec{V}_{30}^{a,b,c}$ en función de ella, ya que

$$\vec{V}_{30}^{a,b,c} = [Z_{th}^{a,b,c}] \vec{I}_S^{a,b,c} \quad (4.16)$$

Del conjunto de ecuaciones (4.2) que describe completamente el comportamiento de este circuito puede notarse que las soluciones (4.9) y (4.10) son las mismas sea que se supongan nulas o iguales las fems de los generadores, razón por la cual es suficiente expresar $\vec{V}_{30}^{a,b,c}$ en función de $\vec{i}_{12}^{a,b,c}$ e $\vec{i}_{13}^{a,b,c}$

$$\vec{V}_{30}^{a,b,c} = z_{01,01}^{a,b,c} \left(\vec{i}_{12}^{a,b,c} + \vec{i}_{13}^{a,b,c} \right) + z_{13,13}^{a,b,c} \vec{i}_{13}^{a,b,c} + z_{13,12}^{a,b,c} \vec{i}_{12}^{a,b,c} \quad (4.17)$$

Reemplazando (4.9) y (4.10) y los datos de la Tabla 1 en (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{30}^{a,b,c} &= - \left[Z_{th}^{a,b,c} \right] \vec{i}_3^{a,b,c} \\
&= j \begin{bmatrix} 0.401179 & 0.108499 & 0.108499 \\ 0.108499 & 0.401179 & 0.108499 \\ 0.108499 & 0.108499 & 0.401179 \end{bmatrix} \vec{I}_S^{a,b,c} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Es decir, comparando (4.16) con (4.18)

$$\left[Z_{th}^{a,b,c} \right] = j \begin{bmatrix} 0.401179 & 0.108499 & 0.108499 \\ 0.108499 & 0.401179 & 0.108499 \\ 0.108499 & 0.108499 & 0.401179 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Reemplazando los valores de las impedancias de fallo en (4.12) se obtiene:

$$\left[Y_F^{a,b,c} \right] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -j 10 & j 10 \\ 0 & j 10 & -j 10 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Reemplazando (4.15), (4.19) y (4.20) en (4.14) con $P = 3$ se obtiene:

$$\vec{v}_{3(F)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 0.241865 \angle -76^\circ \\ 0.778140 \angle -165.88^\circ \\ 0.757246 \angle 175.24^\circ \end{bmatrix} \quad \vec{i}_{3(F)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 2.418646 \angle -76^\circ \\ 2.527213 \angle 180^\circ \\ 2.527213 \angle 0^\circ \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Reemplazando (4.21) en (4.9) y en (4.10) se obtiene:

$$\vec{i}_{12(F)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 0.026871 \angle -104^\circ \\ 0.044459 \angle -14.67^\circ \\ 0.039054 \angle -163.24^\circ \end{bmatrix} \quad \vec{i}_{13(F)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1.426662 \angle -76^\circ \\ 1.477763 \angle -169.62^\circ \\ 1.482639 \angle -0.38^\circ \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.6 ANÁLISIS DE SISTEMAS TRIFÁSICOS DESBALANCEADOS POR EL MÉTODO DE LAS TRES COMPONENTES

Un método alternativo para obtener la solución del conjunto linealmente independiente de ecuaciones que describe completamente el comportamiento de un sistema trifásico consiste en recurrir a una transformación lineal (redefinición de variables) como la siguiente:

$$\vec{i}_{pq}^{a,b,c} = [T] \vec{i}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} \quad \vec{v}_{pq}^{a,b,c} = [T] \vec{v}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} \quad \vec{E}_g^{a,b,c} = [T] \vec{E}_g^{\alpha,\beta,\gamma} \quad (4.23)$$

Así, por ejemplo, para las ecuaciones (2) se definen las siguientes relaciones entre las viejas variables y las nuevas

$$\begin{aligned} \vec{i}_{12}^{a,b,c} &= [T] \vec{i}_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} & \vec{E}_1^{a,b,c} &= [T] \vec{E}_1^{\alpha,\beta,\gamma} & \vec{i}_3^{a,b,c} &= [T] \vec{i}_3^{\alpha,\beta,\gamma} \\ \vec{i}_{13}^{a,b,c} &= [T] \vec{i}_{13}^{\alpha,\beta,\gamma} & \vec{E}_2^{a,b,c} &= [T] \vec{E}_2^{\alpha,\beta,\gamma} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reemplazando (4.24) en (4.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^{\alpha,\beta,\gamma} &= [T]^{-1} \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} + [T]^{-1} \left(z_{01,01}^{a,b,c} + \right. \\ &\quad \left. z_{13,13}^{a,b,c} + z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_{13}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\ &\quad - [T]^{-1} \left(z_{32,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_3^{\alpha,\beta,\gamma} + \vec{E}_2^{\alpha,\beta,\gamma} \\ \vec{E}_1^{\alpha,\beta,\gamma} &= [T]^{-1} \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,12}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} + [T]^{-1} \left(z_{01,01}^{a,b,c} + z_{12,13}^{a,b,c} + \right. \\ &\quad \left. z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_{13}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\ &\quad - [T]^{-1} \left(z_{12,32}^{a,b,c} + z_{02,02}^{a,b,c} \right) [T] \vec{i}_3^{\alpha,\beta,\gamma} + \vec{E}_2^{\alpha,\beta,\gamma} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Definiendo

$$z_{pq,rs}^{\alpha,\beta,\gamma} = [T]^{-1} z_{pq,rs}^{a,b,c} [T] \quad (4.26)$$

(4.25) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1^{\alpha,\beta,\gamma} &= \left(z_{01,01}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{12,13}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{12,32}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\
 &\quad \left(z_{01,01}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{13,13}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{32,32}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_{13}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\
 &\quad - \left(z_{32,32}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_3^{\alpha,\beta,\gamma} + \vec{E}_2^{\alpha,\beta,\gamma} \\
 \vec{E}_1^{\alpha,\beta,\gamma} &= \left(z_{01,01}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{12,12}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\
 &\quad \left(z_{01,01}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{12,13}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{12,32}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_{13}^{\alpha,\beta,\gamma} + \\
 &\quad - \left(z_{12,32}^{\alpha,\beta,\gamma} + z_{02,02}^{\alpha,\beta,\gamma} \right) \vec{i}_3^{\alpha,\beta,\gamma} + \vec{E}_2^{\alpha,\beta,\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.27), lo mismo que (4.2), es un conjunto de 6 ecuaciones simultáneas agrupadas en dos conjuntos de 3 cada uno. Si todas las matrices en (4.27) fueran diagonales el esfuerzo computacional para resolverlo sería mucho menor que el requerido para hallar la solución a (4.2). Más adelante se describe un método para hallar matrices $[T]$ que tienen la propiedad de que cuando se reemplazan en (4.26) resulta una $z_{pq,rs}^{\alpha,\beta,\gamma}$ diagonal. Por lo tanto, (4.26) se puede reescribir así

$$[T]^{-1} z_{pq,rs}^{a,b,c} [T] = z_{pq,rs}^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} z_{pq,rs}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & z_{pq,rs}^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & z_{pq,rs}^{\gamma} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Vale la pena destacar que para hallar los elementos diagonales de (4.28) no es necesario realizar dicho producto para cada una de las impedancias propias y mutuas del sistema eléctrico de potencia, ya que, como se verá más adelante, es costumbre reducir considerablemente la complejidad del problema sin sacrificar precisión en los cálculos suponiendo la estructura de dichas matrices idéntica. Además dichos valores son independientes de la matriz $[T]$ y son función únicamente de los elementos de la $z_{pq,rs}^{a,b,c}$ correspondiente.

La 1ª y la 4ª de las ecuaciones en (4.27) (la primera del primer conjunto y la primera del segundo conjunto) son independientes de las otras 4 y se las puede considerar como el conjunto de las dos ecuaciones simultáneas siguientes:

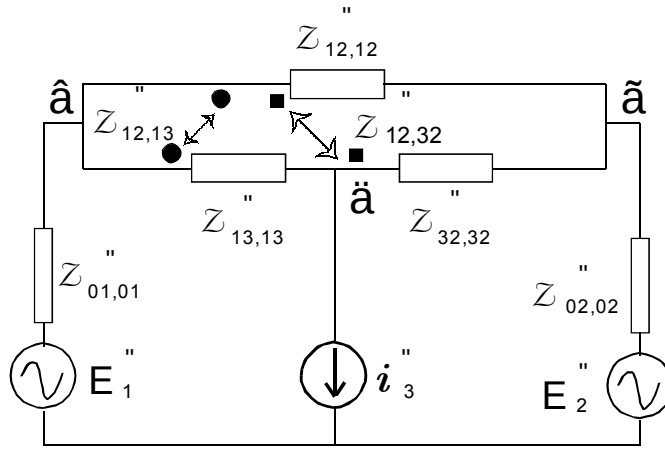


Figura 4.8. Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.29) (red de secuencia alpha α)

$$\begin{aligned}
 E_1^\alpha &= (z_{01,01}^\alpha + z_{12,13}^\alpha + z_{12,32}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_{12}^\alpha + (z_{01,01}^\alpha + z_{13,13}^\alpha + z_{32,32}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_{13}^\alpha + \\
 &\quad - (z_{32,32}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_3^\alpha + E_2^\alpha \\
 E_1^\alpha &= (z_{01,01}^\alpha + z_{12,12}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_{12}^\alpha + (z_{01,01}^\alpha + z_{12,13}^\alpha + z_{12,32}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_{13}^\alpha + \\
 &\quad - (z_{12,32}^\alpha + z_{02,02}^\alpha) i_3^\alpha + E_2^\alpha
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

que corresponden a las que describen completamente un circuito monofásico, que se denomina red de secuencia alfa (α), como el de la Figura 4.8

Similarmente, la 2ª y la 5ª de las ecuaciones en (4.27) (la segunda del primer conjunto y la segunda del segundo conjunto) son independientes de las otras 4 y se las puede considerar como el conjunto de las dos ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{aligned}
 E_1^\beta &= (z_{01,01}^\beta + z_{12,13}^\beta + z_{12,32}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_{12}^\beta + (z_{01,01}^\beta + z_{13,13}^\beta + z_{32,32}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_{13}^\beta + \\
 &\quad - (z_{32,32}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_3^\beta + E_2^\beta \\
 E_1^\beta &= (z_{01,01}^\beta + z_{12,12}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_{12}^\beta + (z_{01,01}^\beta + z_{12,13}^\beta + z_{12,32}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_{13}^\beta + \\
 &\quad - (z_{12,32}^\beta + z_{02,02}^\beta) i_3^\beta + E_2^\beta
 \end{aligned} \quad (4.30)$$

que corresponden a las que describen completamente un circuito monofásico como el

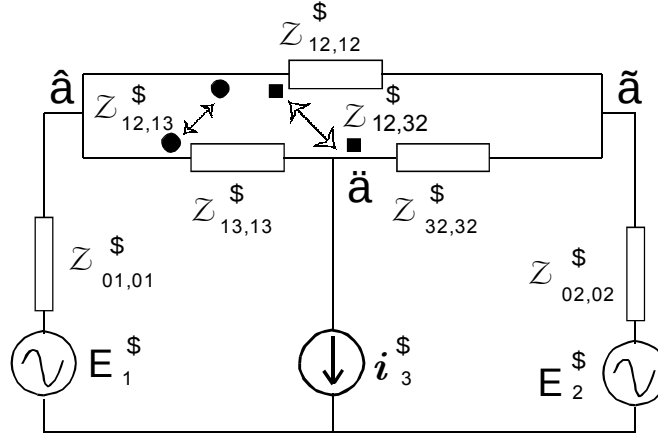


Figura 4.9. Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.30) (red de secuencia β)

de la Figura 4.9 que se denomina red de secuencia beta (β).

Finalmente, la 3ª y la 6ª de las ecuaciones en (4.27) (la tercera del primer conjunto y la tercera del segundo conjunto) son independientes de las otras 4 y se las puede considerar como el conjunto de las dos ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{aligned}
 E_1^\gamma &= (z_{01,01}^\gamma + z_{12,13}^\gamma + z_{12,32}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_{12}^\gamma + (z_{01,01}^\gamma + z_{13,13}^\gamma + z_{32,32}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_{13}^\gamma + \\
 &\quad - (z_{32,32}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_3^\gamma + E_2^\gamma \\
 E_1^\gamma &= (z_{01,01}^\gamma + z_{12,12}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_{12}^\gamma + (z_{01,01}^\gamma + z_{12,13}^\gamma + z_{12,32}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_{13}^\gamma + \\
 &\quad - (z_{12,32}^\gamma + z_{02,02}^\gamma) i_3^\gamma + E_2^\gamma
 \end{aligned} \quad (4.31)$$

que corresponden a las que describen completamente un circuito monofásico como el de la Figura 4.10 que se le conoce con el nombre de red de secuencia gamma γ .

Nótese que la anterior discusión supone que la matriz de transformación $[T]$ de todas las corrientes, de todos los voltajes y de todas las fuentes independientes sea la misma. Además se requiere que cuando se la reemplaza en (4.28) con cada una de las impedancias propias y mutuas todas resulten diagonalizadas.

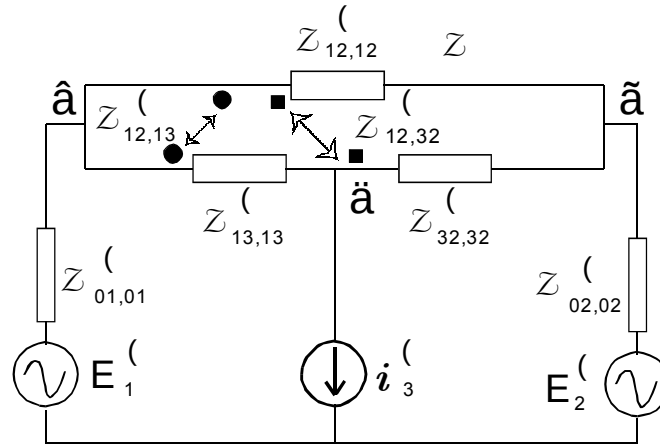


Figura 4.10. Circuito monofásico descrito por el conjunto de ecuaciones (4.31) (red de secuencia γ)

4.7 TRANSFORMACIÓN DE SIMILARIDAD

Sea

$$[A] \vec{x} = \vec{b} \quad [z_{pq,pq}^{a,b,c}] \vec{i}_{pq}^{a,b,c} = \vec{v}_{pq}^{a,b,c} \quad (4.32)$$

un sistema de ecuaciones lineales y

$$\vec{x} = [T] \vec{y} \quad \vec{i}_{pq}^{a,b,c} = [T_S] \vec{i}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} \quad \vec{v}_{pq}^{a,b,c} = [T_S] \vec{v}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} \quad (4.33)$$

una definición de variables auxiliares o transformación lineal.

Reemplazando (4.33) en (4.32) se obtiene:

$$\begin{aligned} \{[T]^{-1}[A][T]\} \vec{y} &= [T]^{-1} \vec{b} \\ \{[T_S]^{-1}[z_{pq,pq}^{a,b,c}][T_S]\} \vec{i}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} &= \vec{v}_{pq}^{\alpha,\beta,\gamma} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Para obtener una matriz $[T]$ (o $[T_S]$) tal que la estructura del sistema de ecuaciones (4.34) sea diagonal se procede de la siguiente manera:

- 1 Se hallan los valores propios de la matriz $[A]$, λ_k $\{k = 1, 2, \dots, n\}$, los cuales se definen como las raíces de la “ecuación característica”

$$|[A] - \lambda [U]| = 0 \quad (4.35)$$

donde $[U]$ es la matriz idéntica de orden igual al de la matriz $[A]$ y $|[w]|$ es el determinante de $[w]$

- 2 Para cada uno de los valores anteriores, λ_i por ejemplo, se obtiene un vector propio que se define como una solución no trivial al sistema de ecuaciones

$$\{[A] - \lambda_i [U]\} \vec{x}_i = \vec{0} \quad (4.36)$$

Nótese que (4.36) es un conjunto linealmente dependiente puesto que λ_i satisface (4.35). Es decir, el número de ecuaciones linealmente independientes es menor que el número de incógnitas y por tanto se puede elegir arbitrariamente valores para algunas de éstas. Además, una solución no trivial implica que por lo menos una de las componentes del vector $\vec{x}_i$ debe ser diferente de cero. Cuando en la solución de (4.35) ocurra una raíz repetida se deben hallar para este valor tantos vectores propios linealmente independientes como la multiplicidad de dicha raíz.

- 3 Las columnas de la matriz $[T]$, que algunos autores llaman modal, son los vectores propios hallados en 2. Es decir,

$$[T] = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_k & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

4.7.1 EJEMPLO 3

Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$[A] = [z_{pq,pq}^{a,b,c}] = \begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Reemplazando (4.38) en (4.35) se obtiene el polinomio de tercer orden o ecuación característica:

$$\left| \begin{bmatrix} Z - \lambda & M & M \\ M & Z - \lambda & M \\ M & M & Z - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

cuya solución es

$$\lambda_0 = Z + 2M \quad \lambda_1 = Z - M \quad \lambda_2 = Z - M \quad (4.39)$$

Reemplazando λ_0 de (4.39) en (4.36) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -2M & M & M \\ M & -2M & M \\ M & M & -2M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el que hay únicamente dos ecuaciones linealmente independientes (rango de la matriz de coeficientes = 2). Una vez eliminada la tercera ecuación se puede dividir por la constante diferente de cero M , suponer un valor arbitrario para una de las variables, $x_3 = k \neq 0$ por ejemplo, y resolver para llegar a la siguiente condición que deben satisfacer las componentes del vector propio correspondiente a λ_0

$$x_1 = x_2 = x_3 = k \neq 0 \quad (4.40)$$

Similarmente, reemplazando $\lambda_1 = \lambda_2$ de (4.39) en (4.36) resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} M & M & M \\ M & M & M \\ M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

del que se pueden eliminar dos de ellas, dividir la que queda por la constante M ($\neq 0$) y obtener la siguiente condición para las componentes de los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (4.41)$$

Puesto que λ_1 es una raíz repetida de multiplicidad 2 se deben obtener dos vectores propios linealmente independientes, al menos una de cuyas componentes sea $\neq 0$, que satisfagan (4.41)

Cualquier matriz cuya primera columna satisfaga (4.40) y cuyas segunda y tercera columnas sean linealmente independientes y satisfagan (4.41), cada una por separado, se puede utilizar como matriz modal. Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} [T_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & [T_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ [T_S] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} & a &= e^{j \frac{2\pi}{3}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Fácilmente se puede verificar que reemplazando (4.38) y cualquiera de las matrices de (4.42) en (4.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} [T_1]^{-1} [z_{pq,pq}^{a,b,c}] [T_1] &= [T_2]^{-1} [z_{pq,pq}^{a,b,c}] [T_2] = [T_S]^{-1} [z_{pq,pq}^{a,b,c}] [T_S] = \\ [z_{pq,pq}^{\alpha,\beta,\gamma}] &= \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{pq,rs}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & z_{pq,rs}^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & z_{pq,rs}^{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde λ_0 , λ_1 y λ_2 se obtienen de (4.39)

4.7.2 EJEMPLO 4

De la tabla 4.1 puede notarse que todas las impedancias propias y mutuas del problema del EJEMPLO 1 son de la forma (4.38). Los resultados obtenidos en (4.22) para valores de las fuentes independientes dadas en (4.8) y (4.21) (EJEMPLO 2) se pueden obtener por el método de las componentes utilizando para ello cualquiera de las matrices en (4.42), $[T] = [T_1]$ por ejemplo. Con esta elección los valores para las componentes α , β y γ de las excitaciones se obtienen de (4.24). Es decir,

$$\vec{i}_{3(F)}^{\alpha,\beta,\gamma} = [T_1]^{-1} \vec{i}_{3(F)}^{a,b,c} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.418646 \angle -76^\circ \\ 2.527213 \angle 180^\circ \\ 2.527213 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\vec{i}_{3(F)}^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} i_{3(F)}^\alpha \\ i_{3(F)}^\beta \\ i_{3(F)}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.806215 \angle -76^\circ \\ 2.832421 \angle 163.97^\circ \\ 1.612431 \angle -76^\circ \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\vec{E}_{1(0)}^{\alpha,\beta,\gamma} = \vec{E}_{2(0)}^{\alpha,\beta,\gamma} = [T_1]^{-1} \vec{E}_{1(0)}^{a,b,c} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1(0)}^\alpha \\ E_{1(0)}^\beta \\ E_{1(0)}^\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ a^2 \\ 1 \angle 0^\circ \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Además, con los datos de la Tabla 4.1 se puede aplicar (4.43) y (4.39) para obtener los siguientes valores de las impedancias de secuencia (propias y mutuas):

$$\begin{aligned} z_{01,01}^\alpha &= j0.035 & z_{13,13}^\alpha &= j1.0 & z_{02,02}^\alpha &= j0.035 \\ z_{12,12}^\alpha &= j2.5 & & & z_{32,32}^\alpha &= j1.5 \\ z_{12,13}^\alpha &= j0.6 & & & z_{12,32}^\alpha &= j0.9 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} z_{01,01}^\beta &= j0.1025 & z_{13,13}^\beta &= j0.4 & z_{02,02}^\beta &= j0.1025 \\ z_{12,12}^\beta &= j1.0 & & & z_{32,32}^\beta &= j0.6 \\ z_{12,13}^\beta &= j0.0 & & & z_{12,32}^\beta &= j0.0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} z_{01,01}^\gamma &= j0.1025 & z_{13,13}^\gamma &= j0.4 & z_{02,02}^\gamma &= j0.1025 \\ z_{12,12}^\gamma &= j1.0 & & & z_{32,32}^\gamma &= j0.6 \\ z_{12,13}^\gamma &= j0.0 & & & z_{12,32}^\gamma &= j0.0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Reemplazando en el circuito de la figura 7 los valores de las impedancias de secuencia α dados en (4.46) y las excitaciones de la misma secuencia en (4.44) y (4.45), describiendo el circuito resultante en función de corrientes de enlace de acuerdo al gráfico orientado de la Figura 4.4 es lo mismo que reemplazar (4.46), (4.44) y (4.45) en (4.29). Después de simplificar y expresar en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1.57 & 2.57 \\ 2.57 & 1.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{12(F)}^\alpha \\ i_{13(F)}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.535 \\ 0.935 \end{bmatrix} i_{3(F)}^\alpha \quad (4.49)$$

Similarmente, reemplazando en el circuito de la figura 4.9 los valores de las impedancias de secuencia β dados en (4.47) y las excitaciones de la misma secuencia en (4.44) y (4.45), describiendo el circuito resultante en función de corrientes de enlace de acuerdo al gráfico orientado de la Figura 4.4, es lo mismo que reemplazar (4.47), (4.44) y (4.45) en (4.30). Después de simplificar y expresar en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.205 & 1.205 \\ 1.205 & 0.205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{12(F)}^\beta \\ i_{13(F)}^\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7025 \\ 0.1025 \end{bmatrix} i_{3(F)}^\beta \quad (4.50)$$

Así mismo, reemplazando en el circuito de la Figura 4.9 los valores de las impedancias de secuencia dados en (4.48) y las excitaciones de la misma secuencia en (4.44) y (4.45), describiendo el circuito resultante en función de corrientes de enlace de acuerdo al gráfico orientado de la Figura 4.4, es lo mismo que reemplazar (4.48), (4.44) y (4.45) en (4.31). Después de simplificar y expresar en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.205 & 1.205 \\ 1.205 & 0.205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{12(F)}^\gamma \\ i_{13(F)}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7025 \\ 0.1025 \end{bmatrix} i_{3(F)}^\gamma \quad (4.51)$$

Resolviendo separadamente (4.49), (4.50) y (4.51) se obtiene:

$$\begin{aligned} i_{12(F)}^\alpha &= -0.00169 i_{3(F)}^\alpha & i_{13(F)}^\alpha &= 0.598309 i_{3(F)}^\alpha \\ i_{12(F)}^\beta &= -0.01454 i_{3(F)}^\beta & i_{13(F)}^\beta &= 0.585461 i_{3(F)}^\beta \\ i_{12(F)}^\gamma &= -0.01454 i_{3(F)}^\gamma & i_{13(F)}^\gamma &= 0.585461 i_{3(F)}^\gamma \end{aligned} \quad (4.52)$$

Se puede verificar que reemplazando (4.44) en (4.52) y lo resultante en (4.24) con $[T] = [T_1]$ de (4.42), se obtiene el mismo resultado (4.22).

4.7.3 EJERCICIOS

- 1 Resolver el EJEMPLO 4 $[T] = [T_S]$ de (4.42)
- 2 La impedancia interna característica de un generador trifásico tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} z_{0k,0k}^{a,b,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & M_f & M_r \\ M_r & Z & M_f \\ M_f & M_r & Z \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

- a Demostrar que los valores propios de (4.53) son los siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= Z + M_f + M_r \\ \lambda_1 &= Z + a^2 M_f + a M_r \\ \lambda_2 &= Z + a M_f + a^2 M_r \end{aligned} \quad (4.54)$$

- b Verificar que

$$[T_S]^{-1} \begin{bmatrix} z_{0k,0k}^{a,b,c} \end{bmatrix} [T_S] = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde los valores de 0, 1 y 2 se obtienen de las expresiones (4.54)

4.8 APROXIMACIONES EN ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO

- 1 Las fems de los generadores después del desequilibrio permanecen como estaban antes de éste, lo cual se justifica en virtud de los siguientes hechos:
 - a La velocidad continúa siendo la sincrónica ya que es independiente de las condiciones de carga (de allí proviene el nombre generador sincrónico). El suministro de energía mecánica no se interrumpe: la caída de agua en el caso de las centrales hidráulicas o el vapor de agua en el de las térmicas siguen haciendo girar las turbinas acopladas mecánicamente a los ejes de los generadores.

- b La corriente que crea el campo magnético giratorio continua invariable ya que el devanado de campo se excita con una fuente independiente de voltaje de valor constante.
- c Las diferencias de fase de las fems inducidas en los devanados del estator dependen de la interconexión entre los conductores alojados en las ranuras (los que permanecen estacionarios), la cual no cambia. Matemáticamente esta suposición se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_{g(0)}^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} E_{g(0)}^a = E_{g(F)}^{a,b,c} \quad (4.55)$$

- 2 Se desprecian las corrientes que circulan por el sistema antes de producirse el fallo (corrientes de carga), ya que, en general, las de corto- circuito son mucho mayores. Lo anterior equivale a suponer que las fems de todos los generadores son iguales en magnitud y fase. Bajo estas circunstancias no hay caídas de tensión en los sistemas de transmisión y los voltajes de prefallo en todos los nodos de la misma fase son iguales. Se acostumbra suponer, además, que la magnitud en tanto por uno es la unidad y tomar como referencia el de la fase a. Es decir,

$$E_{gk(0)}^a = V_{p(0)}^a = 1.0 \angle 0^\circ \text{ p. u. } \forall k, P \quad (4.56)$$

donde $V_{P(0)}$ es el voltaje en la fase a en el punto o localización geográfica P donde ocurre el fallo, antes de producirse éste. Nótese que un análisis más exacto requiere resolver las ecuaciones no lineales que describen completamente el comportamiento del sistema en condiciones normales de operación (de prefallo), lo cual implica un esfuerzo computacional muy grande, ya que se debe recurrir a procesos iterativos a partir de una adivinación inicial hasta obtener convergencia. De todas maneras es de esperarse que las corrientes de corto-circuito obtenidas no difieran mucho cuando se hace la suposición (4.56) ya que dados los estrechos límites de regulación impuestos a los diseñadores y operadores de los sistemas se puede afirmar que, antes de producirse el fallo, las magnitudes de los voltajes en todas los puntos o localizaciones geográficas son cercanos a la unidad en tanto por uno.

- 3 Se desprecia la contribución de las cargas pasivas a la corriente total de fallo ya que la potencia absorbida por ellas bajo condiciones de fallo se reduce considerablemente debido a la disminución en las magnitudes de los voltajes. Se exceptúan los motores sincrónicos de gran tamaño porque inmediatamente después de producirse el fallo durante los primeros ciclos se comportan como generadores, ya que su devanado de campo permanece excitado por una fuente de voltaje de valor constante y, además, la inercia de su

rotor y carga mecánica, unidos, mantiene la rotación durante un período indeterminado antes de llegar al reposo. Por esta razón deben representarse como generadores y se deben tener en cuenta en la obtención de la impedancia de Thévenin.

- 4 Se desprecian las admitancias paralelo de los circuitos equivalentes de transformadores y sistemas de transmisión. Nótese que al omitirlas se está suponiendo un valor nulo para ellas.
- 5 La matriz equivalente de impedancias de cada sistema de transmisión que relaciona las caídas de tensión en las tres fases con las corrientes a través de ellas tiene la forma (4.38). Nótese de (4.39) y (4.43) que una consecuencia de esta suposición es que las impedancias de secuencia β y γ son iguales para estos elementos.
- 6 La matriz de impedancias mutuas equivalentes entre sistemas de transmisión que comparten “el derecho a la vía”, al menos durante un trayecto, tienen la forma (4.38) con $Z = M$. Nótese de (4.39) y (4.43) que una consecuencia de esta aproximación es que no aparecen elementos mutuamente acoplados en la red de secuencia β , ni en la de secuencia γ , y que en la de secuencia α los acoplamientos mutuos son $3M$.
- 7 Las impedancias internas de todos los generadores tienen la forma (4.53), lo cual implica que sus impedancias de secuencia β y γ son diferentes como se indica en (4.54). Se acostumbra aproximar (4.53) como (4.38) donde

$$M = \frac{M_f + M_r}{2} \quad (4.57)$$

Uno de los objetivos de (4.57) es que las redes de secuencia β y γ sean idénticas en cuanto a sus impedancias y solo difieran en las excitaciones o fuentes independientes. El efecto de esta aproximación en los resultados es despreciable si se tiene en cuenta el reducido número de generadores con respecto al de sistemas de transmisión y de transformadores.

- 8 Se desprecian las resistencias. El tenerlas en cuenta implicaría utilizar aritmética de números complejos. La simplificación obtenida en los cálculos es significativa y se justifica ya que es un hecho conocido la alta relación de la reactancia inductiva a la resistencia (X/R) en sistemas de alto voltaje. Las corrientes de corto-circuito calculadas son ligeramente mayores a las que se obtendrían si la tuviera en cuenta (a expensas de un esfuerzo computacional mucho más elevado). Sin embargo, se puede ver este hecho como una ventaja ya que se está del “lado seguro” cuando de seleccionar las protecciones o los interruptores de potencia se trata.

4.9 COMPONENTES SIMÉTRICAS

Se ha visto que si en un sistema trifásico, que opera bajo condiciones de equilibrio y simetría, se introduce un fallo paralelo, tanto las corrientes a través de las tres fases de cada elemento trifásico como los voltajes de nodo de cada una de las fases en todas partes en el estado estacionario, en general, tienen magnitudes y ángulos de fase diferentes. Es decir, los 3 fasores o cantidades complejas que los representan son desbalanceados ¹¹. Como se recuerda ^[4] este conjunto se puede expresar como la suma de tres conjuntos balanceados. Matemáticamente,

$$\begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{b0} \\ V^{c0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V^{a1} \\ V^{b1} \\ V^{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V^{a2} \\ V^{b2} \\ V^{c2} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

donde $|V^{ak}| = |V^{bk}| = |V^{ck}|$ ($k = 0, 1, 2$) y se supone que V^{ak} adelanta a V^{bk} y éste a V^{ck} $\frac{1}{3} 2\pi k$ radianes. Es decir, las componentes de secuencia cero, V^{a0} , V^{b0} y V^{c0} están en fase; V^{a1} , V^{b1} y V^{c1} constituyen un conjunto de fasores de *secuencia abc (positiva)* y V^{a2} , V^{b2} y V^{c2} uno de *secuencia acb (negativa)*. Cada uno de estos conjuntos se puede expresar matemáticamente definiendo el operador $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{b0} \\ V^{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V^{a0} \quad \begin{bmatrix} V^{a2} \\ V^{b2} \\ V^{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} V^{a2} \quad (4.59)$$

Estos conjuntos balanceados también pueden expresarse en función de V^{b0} , V^{b1} y V^{b2} de la siguiente manera:

¹¹ Se define un conjunto balanceado de fasores como aquél en el que cada elemento tiene una misma magnitud y la diferencia de fase entre dos de ellos consecutivos es la misma. Aunque en las ecuaciones se utiliza el símbolo acostumbrado para designar voltajes, es lógico que los resultados de este numeral también se aplican a cantidades complejas desbalanceadas que representan corrientes

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{b0} \\ V^{c0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V^{b0} & \begin{bmatrix} V^{a1} \\ V^{b1} \\ V^{c1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{bmatrix} V^{b1} \\
 & & \begin{bmatrix} V^{a2} \\ V^{b2} \\ V^{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} V^{b2}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

o en función de V^{c0} , V^{c1} y V^{c2} así:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{b0} \\ V^{c0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V^{c0} & \begin{bmatrix} V^{a1} \\ V^{b1} \\ V^{c1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} V^{c1} \\
 & & \begin{bmatrix} V^{a2} \\ V^{b2} \\ V^{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ 1 \end{bmatrix} V^{c2}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Reemplazando (4.59) o (4.60) o (4.61) en (4.58), expresando en notación matricial e invirtiendo se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de secuencia:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{a1} \\ V^{a2} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} V^{a0} \\ V^{a1} \\ V^{a2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{b0} \\ V^{b1} \\ V^{b2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} V^{b0} \\ V^{b1} \\ V^{b2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{c0} \\ V^{c1} \\ V^{c2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} V^{c0} \\ V^{c1} \\ V^{c2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^a \\ V^b \\ V^c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

donde se nota que la inversa se puede obtener como $\frac{1}{3}$ de la transpuesta conjugada

(4.62), (4.63) y (4.64) se pueden reescribir de la siguiente manera: introduciendo notación compacta

$$\begin{aligned}
\vec{V}^{a,b,c} &= [T_S^a] \vec{V}^{a0,a1,a2} & \vec{V}^{a0,a1,a2} &= [T_S^a]^{-1} \vec{V}^{a,b,c} \\
\vec{V}^{a,b,c} &= [T_S^b] \vec{V}^{b0,b1,b2} & \vec{V}^{b0,b1,b2} &= [T_S^b]^{-1} \vec{V}^{a,b,c} \\
\vec{V}^{a,b,c} &= [T_S^c] \vec{V}^{c0,c1,c2} & \vec{V}^{c0,c1,c2} &= [T_S^c]^{-1} \vec{V}^{a,b,c}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

donde la definición de cada vector o matriz en (4.65) se obtiene por comparación directa con (4.62), (4.63) y (4.64), respectivamente.

Nótese que la primera columna de cada una de las matrices directas en (4.62), (4.63) y (4.64) satisface la condición (4.40) y que la segunda y tercera columnas son linealmente independientes y satisfacen (4.41). Por lo tanto, se puede anticipar el siguiente resultado fácilmente verificable:

$$\begin{aligned}
[T_S^a] [z^{a,b,c}] [T_S^a]^{-1} &= [T_S^b] [z^{a,b,c}] [T_S^b]^{-1} = [T_S^c] [z^{a,b,c}] [T_S^c]^{-1} = \\
\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & z^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & z^{(2)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

donde λ_0 , λ_1 y λ_2 se obtienen de (4.39) o de (4.54) según que $[z^{a,b,c}]$ tenga la forma (4.38) o (4.57), respectivamente. De (4.66) puede verse la razón de denominar los valores de λ_0 , λ_1 y λ_2 de cada elemento trifásico su impedancia de secuencia cero, positiva y negativa, respectivamente

De la discusión anterior se concluye que el comportamiento de un sistema trifásico (simétrico desde el punto de vista de las impedancias propias y mutuas) a una excitación desbalanceada se puede estudiar superponiendo la respuesta del sistema trifásico a cada uno de los conjuntos balanceados constituidos por las correspondientes componentes de secuencia cero, positiva y negativa, [ver ec. (4.58)], cada una de las cuales se puede obtener mediante un circuito monofásico (red de secuencia).

Cuando se aplican las componentes simétricas en estudios de corto-circuito en sistemas trifásicos [escogiendo como matriz de transformación una cualquiera de las que aparecen en las ecuaciones (4.62), (4.63) o (4.64)] *desaparecen las fems de los generadores en las redes de secuencia cero y negativa* ya que su valor es nulo, lo cual se puede verificar fácilmente multiplicando la inversa de cualquiera de dichas matrices por cualquiera de los conjuntos de secuencia positiva de las ecs (4.59), (4.60) o (4.61). Así por ejemplo,

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} V^{a1} = \begin{bmatrix} 0 \\ V^{a1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Una de las ventajas fundamentales de las componentes simétricas es la facilidad para determinar experimentalmente las impedancias de secuencia de cualquier elemento trifásico. Así, por ejemplo, aplicando voltajes balanceados a las tres fases de un sistema de transmisión en el envío p y uniendo los conductores en el recibo q , como se muestra en la Figura 4.11, se obtiene una relación entre la caída de tensión y la corriente a través de cada fase, que depende de la secuencia de los voltajes aplicados, de acuerdo a las siguientes ecuaciones

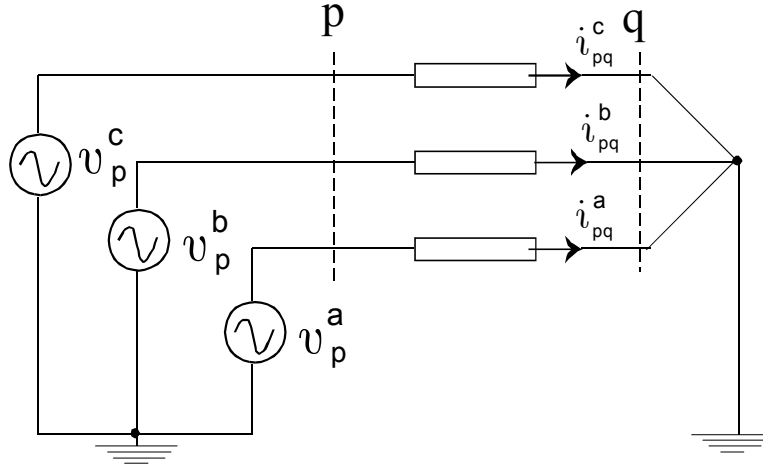


Figura 4.11. Determinación experimental de las impedancias de secuencia de un sistema de transmisión

$$\frac{v_{pq}^a}{i_{pq}^a} = \frac{v_{pq}^b}{i_{pq}^b} = \frac{v_{pq}^c}{i_{pq}^c} = Z - M \quad v_p^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} v_p^a \quad (4.68)$$

$$\frac{v_{pq}^a}{i_{pq}^a} = \frac{v_{pq}^b}{i_{pq}^b} = \frac{v_{pq}^c}{i_{pq}^c} = Z - M \quad v_p^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} v_p^a \quad (4.69)$$

$$\frac{v_{pq}^a}{i_{pq}^a} = \frac{v_{pq}^b}{i_{pq}^b} = \frac{v_{pq}^c}{i_{pq}^c} = Z + 2M \quad v_p^{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_p^a \quad (4.70)$$

Nótese que, puesto que las fems generadas por las máquinas sincrónicas de un sistema trifásico son siempre balanceadas (ver (4.55)), las excitaciones definidas en (4.70) se obtienen fácilmente en la práctica.

4.10 ANÁLISIS DE FALLOS PARALELO POR EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS

Las condiciones de frontera impuestas por cada tipo de fallo permiten relacionar entre sí las componentes de secuencia de las corrientes y de los voltajes en el punto de fallo. El **procedimiento general para derivar una interconexión típica entre las redes de secuencia para cada tipo de fallo**, a partir de la cual se pueden determinar directamente los valores de dichas componentes de secuencia, es el siguiente :

- 1 La Figura 4.12 ilustra el resultado obtenido después realizados los siguientes pasos¹²:

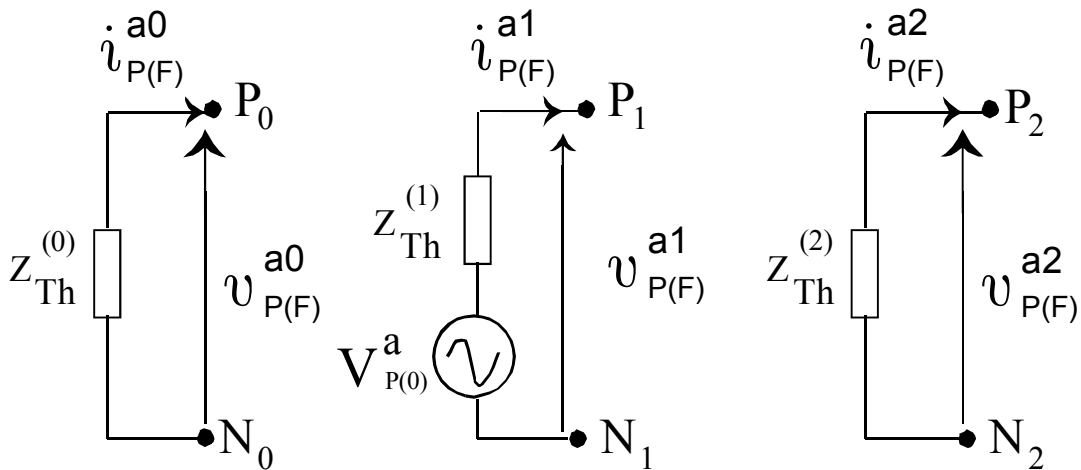


Figura 4.12. Equivalentes de Thévenin de cada una de las redes de secuencia

- a Obtener la red de secuencia cero del circuito de prefallo con los valores $\lambda_0 = Z + 2M = z_{pq}^{(0)}$ de cada elemento de circuito trifásico¹³. Obtener el equivalente de Thévenin entre el nodo donde ocurre el fallo P_0 y el de referencia N_0
- b Obtener la red de secuencia positiva del circuito de prefallo con los valores $\lambda_1 =$

¹² En la siguiente discusión se supone que se adopta como matriz de transformación $[T_S^a]$ obtenida de la comparación entre (4.61) y (4.65). Sin embargo, se pueden considerar las otras dos alternativas: $[T_S^b]$ o $[T_S^c]$ que surgen de la comparación entre (4.65) y (4.62) o (4.63), respectivamente, en cuyos casos se debe modificar la fase de referencia en la Figura 4.12

¹³ Se supone que la impedancia interna de los generadores se ha aproximado de acuerdo a la forma (4.38) donde M viene dado por (4.57). Recordar que en virtud de la aproximación (4.55) no aparecen fém's en la red de secuencia cero [ver(4.67)]

- $Z - M = z_{pq}^{(1)}$ de cada elemento de circuito trifásico. Obtener el equivalente de Thévenin entre el nodo donde ocurre el fallo P_1 y el de referencia N_1 . Las fems de los generadores se colocan todas iguales aplicando la aproximación (4.56)
- c Obtener la red de secuencia negativa del circuito de prefallo con los valores $\lambda_2 = Z - M = z_{pq}^{(2)}$ de cada elemento de circuito trifásico. Recuerdese que de acuerdo a (4.67) no aparecen fems en esta secuencia. Obtener el equivalente de Thévenin entre el nodo donde ocurre el fallo P_2 y el de referencia N_2 .
- 2 Se hace un diagrama de circuito del fallo que muestre las conexiones e impedancias (ver Tablas 4.2, 4.3 y 4.4), además de las corrientes y voltajes teniendo la precaución de ser consistentes con las convenciones ya adoptadas para sus sentidos de referencia en la Figura 4.1.
 - 3 Se plantean las ecuaciones linealmente independientes que se obtienen de aplicar las leyes de Kirchhoff a las condiciones de frontera.
 - 4 Se reemplazan las ecuaciones obtenidas en 3 que relacionan únicamente corrientes, cuando las haya, (que se obtuvieron de la aplicación de la primera ley de K. a las condiciones de frontera) en las expresiones para las componentes de secuencia de las corrientes de fallo aplicando (4.62), [o (4.63) o (4.64)] y se comparan éstas para determinar la interconexión apropiada de los terminales P_k o N_k ($k = 0, 1, 2$). Puesto que no se han tenido en cuenta las ecuaciones que se obtienen de la aplicación de la segunda ley de K. no debe haber trayectorias cerradas aún.
 - 5 Se reescriben las ecuaciones obtenidas en 3 no consideradas aún en función de sus componentes simétricas y se reemplaza en ellas las relaciones entre las componentes de secuencia de las corrientes de fallo obtenidas en 4. Del examen de las ecuaciones resultantes se deduce la interconexión de los terminales restantes de los equivalentes de Thévenin de las redes de secuencia.
 - 6 La solución del circuito resultante permite obtener las componentes de secuencia de las corrientes de fallo.

Vale la pena enfatizar que una vez derivada la interconexión entre los equivalentes de Thévenin de las redes de secuencia para un tipo de fallo particular, (cualquiera de los enumerados en las Tablas 4.2, 4.3 y 4.4, por ejemplo), *no es necesario repetir el procedimiento anterior cada vez que se presente uno del mismo tipo*. Nótese, sin embargo, que un cambio en la localización del fallo implica alteración de los valores de los equivalentes de Thévenin.

Vale la pena hacer *notar que los sentidos de referencia de las componentes de secuencia de las corrientes de fallo son tales que fluyen a través de las redes de secuencia desde*

los terminales N_k hacia los P_k ($k = 0, 1, 2$). Por tanto de la aplicación de la segunda ley de K. a cada uno de los equivalentes de Thévenin de la Figura 4.12 se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{P(F)}^{a0} &= -Z_{Th}^{(0)} i_{P(F)}^{a0} & v_{P(F)}^{a1} &= V_{P(0)}^a - Z_{Th}^{(1)} i_{P(F)}^{a1} \\ v_{P(F)}^{a2} &= -Z_{Th}^{(2)} i_{P(F)}^{a2} \end{aligned} \quad (4.71)$$

La aplicación de la primera ley de K. en cada fase en el punto de fallo establece que las corrientes a través del fallo son iguales a la suma de las que circulan a través de cada fase de todos los elementos conectados a él. Es decir,

$$\vec{i}_{P(F)}^{a,b,c} = \sum_k \vec{i}_{kP(F)}^{a,b,c} \quad (4.72)$$

donde los k son los nodos conectados al nodo de fallo P mediante un elemento cualquiera. Premultiplicando por $[T_S]^{-1}$ ambos miembros de (4.72) se obtiene:

$$\vec{i}_{P(F)}^{a0,a1,a2} = \sum_k \vec{i}_{kP(F)}^{a0,a1,a2} \quad (4.73)$$

Por lo tanto, para obtener las componentes de secuencia de las corrientes y/o de los voltajes a través de los elementos de un sistema trifásico, en uno de cuyos puntos ocurre un desbalance paralelo, se debe excitar cada una de las redes de secuencia mediante una fuente de corriente entre el nodo donde ocurre el fallo y la referencia de valor igual al de la componente de la correspondiente secuencia de las corrientes de fallo, obtenidas en 6, y resolver cada uno de los circuitos monofásicos resultantes. Las cantidades de fase de una respuesta deseada se obtienen reemplazando sus componentes simétricas $i_{pq(F)}^{a0}$, $i_{pq(F)}^{a1}$ e $i_{pq(F)}^{a2}$ [o $v_{pq(F)}^{a0}$, $v_{pq(F)}^{a1}$ y $v_{pq(F)}^{a2}$] en (4.62) con $[T] = [T_S^a]$ obtenida de la comparación entre (4.61) y (4.65)

4.11 INTERCONEXIÓN DE LAS REDES DE SECUENCIA PARA LOS DISTINTOS TIPOS DE FALLO PARALELO

4.11.1 FALLO LÍNEA-TIERRA (L-G)

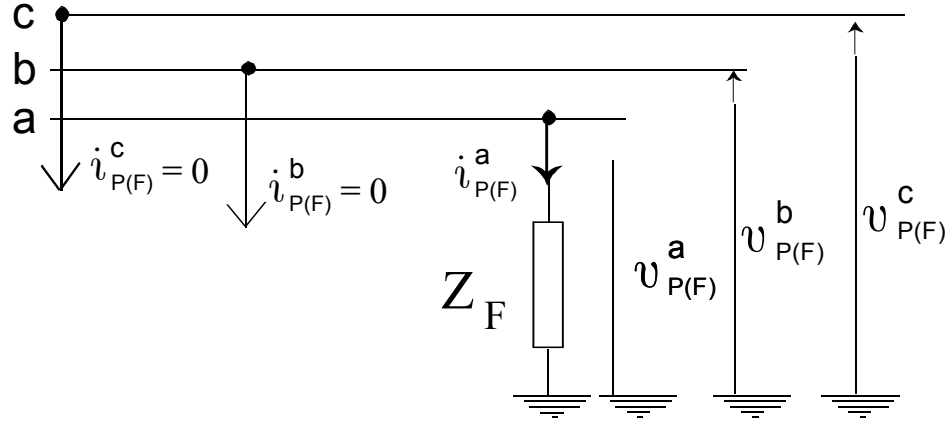


Figura 4.13. Diagrama de circuito para el fallo Línea-Tierra L-G

La Figura 4.13 ilustra el diagrama de circuito del fallo, de cuya inspección se pueden plantear las siguiente ecuaciones impuestas por las condiciones de frontera:

$$i_{P(F)}^b = 0 \quad i_{P(F)}^c = 0 \quad (4.74)$$

$$v_{P(F)}^a = Z_F i_{P(F)}^a \quad (4.75)$$

Reemplazando (4.74) en la segunda de las ecuaciones (4.62) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} i_{P(F)}^{a0} \\ i_{P(F)}^{a1} \\ i_{P(F)}^{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{P(F)}^a \\ i_{P(F)}^b \\ i_{P(F)}^c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} i_{P(F)}^a \quad (4.76)$$

Es decir,

$$i_{P(F)}^{a0} = i_{P(F)}^{a1} = i_{P(F)}^{a2} = \frac{1}{3} i_{P(F)}^a \quad (4.77)$$

de (4.77) se puede deducir las interconexiones de los terminales: P_0 con N_1 y de P_1 con N_2 , realizadas las cuales, como se hizo notar, no se deben generar trayectorias cerradas aún, como muestra la Figura 4.14

Expresando (4.75) en componentes simétricas haciendo uso de (4.62) y reemplazando (4.77) se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{P(F)}^{a0} + v_{P(F)}^{a1} + v_{P(F)}^{a2} &= Z_F (i_{P(F)}^{a0} + i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) \\ &= 3Z_F i_{P(F)}^{a0} = 3Z_F i_{P(F)}^{a1} = 3Z_F i_{P(F)}^{a2} \end{aligned} \quad (4.78)$$

de cuyo análisis se infiere que el terminal P_2 se debe interconectar con N_0 a través de una impedancia $3Z_F$ como muestra la Figura 4.14

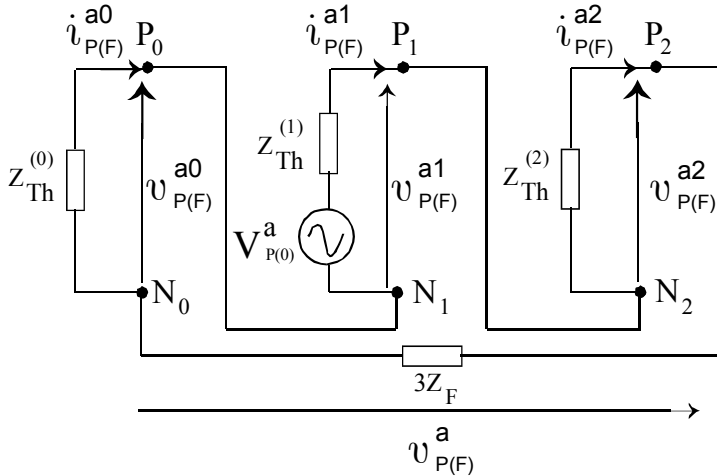


Figura 4.14. Interconexión de las redes de secuencia para un fallo línea tierra

4.11.2 FALLO DOBLE LÍNEA TIERRA (L-L-G)

La Figura 4.15 muestra el diagrama circuital. Aplicando las leyes de K. a las condiciones de frontera se obtiene:

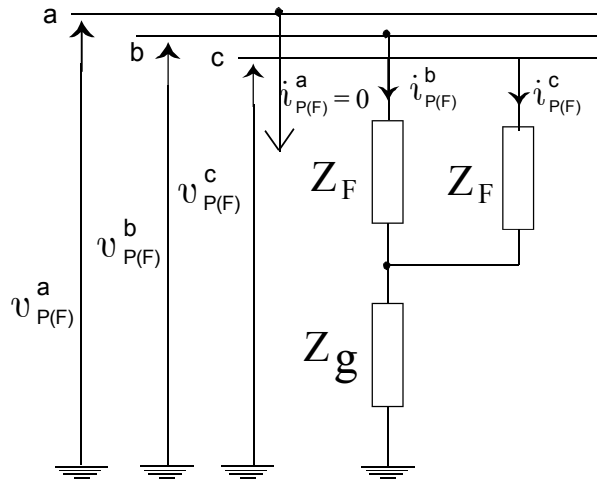


Figura 4.15. Diagrama de circuito de un fallo Línea-Línea-Tierra LL-G

$$i_{P(F)}^a = 0 \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} v_{P(F)}^b &= (Z_F + Z_g) i_{P(F)}^b + Z_g i_{P(F)}^c \\ v_{P(F)}^c &= (Z_F + Z_g) i_{P(F)}^c + Z_g i_{P(F)}^b \end{aligned} \quad (4.80)$$

Expresando (4.79) en sus componentes simétricas se obtiene:

$$i_{P(F)}^{a0} + i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2} = 0 \quad (4.81)$$

de la que se deduce que los terminales N_0 , N_1 y N_2 deben conectarse para formar un nodo (Ver Figura 4.16)

Expresando (4.80) en sus componentes simétricas se obtiene

$$\begin{aligned}
v_{P(F)}^{a0} + a^2 v_{P(F)}^{a1} + a v_{P(F)}^{a2} &= (Z_F + 2Z_g) i_{P(F)}^{a0} + (a^2 Z_F - Z_g) i_{P(F)}^{a1} + \\
&\quad + (a Z_F - Z_g) i_{P(F)}^{a2} \\
v_{P(F)}^{a0} + a v_{P(F)}^{a1} + a^2 v_{P(F)}^{a2} &= (Z_F + 2Z_g) i_{P(F)}^{a0} + (a Z_F - Z_g) i_{P(F)}^{a1} + \\
&\quad + (a^2 Z_F - Z_g) i_{P(F)}^{a2}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (4.82) se obtiene una relación en la que no aparecen las componentes de secuencia cero ni los términos $Z_g i_{P(F)}^{a1}$ ni $Z_g i_{P(F)}^{a1}$ los cuales se eliminan. Después de agrupar las componentes de la misma secuencia (positiva o negativa) en un mismo miembro de la igualdad y de dividir por la misma constante $(a - a^2)$

$$v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1} = v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2} \tag{4.83}$$

Sumando ambas ecuaciones (4.82), teniendo en cuenta que $a^2 + a = -1$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
2 v_{P(F)}^{a0} - v_{P(F)}^{a1} - v_{P(F)}^{a2} &= 2 (Z_F + 2Z_g) i_{P(F)}^{a0} - Z_F i_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a2} + \\
&\quad - 2Z_g (i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2})
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Agrupando las componentes de secuencia cero en uno de los miembros de la igualdad y reemplazando (4.81) en (4.84)

$$\begin{aligned}
2 v_{P(F)}^{a0} - 2 (Z_F + 2Z_g) i_{P(F)}^{a0} - 2Z_g i_{P(F)}^{a0} &= (v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1}) + \\
&\quad + (v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2})
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Reemplazando (4.83) en (4.85) se obtiene

$$v_{P(F)}^{a0} - (Z_F + 3Z_g) i_{P(F)}^{a0} = v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1} = v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2} \tag{4.86}$$

que se simula mediante la interconexión mostrada en la Figura 4.16

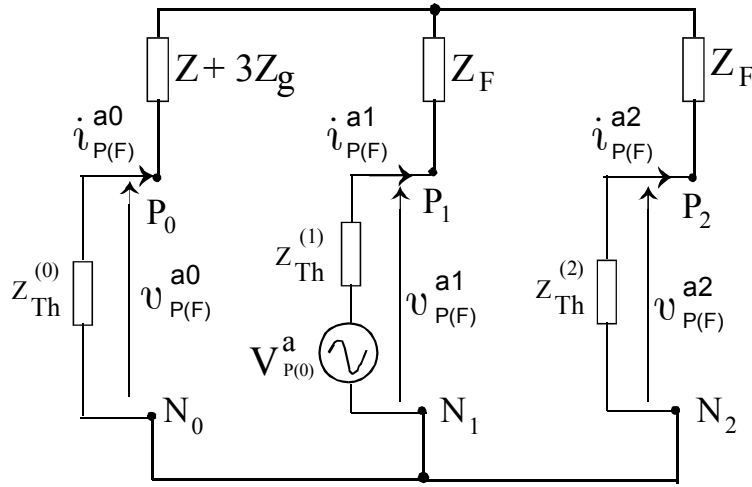


Figura 4.16. Interconexión de las redes de secuencia para fallo doble Línea-Tierra o LL-G

4.11.2.1 EJERCICIO

Demostrar que el fallo entre las dos fases b y c (tipo $L-L$) resulta ser un caso particular del anterior con $Z_g = \infty$.

4.11.3 FALLO SIMULTÁNEO LÍNEA-TIERRA (Fase a) Y LÍNEA-LÍNEA (Fases b y c)

La Figura 4.5 es una ilustración de este tipo de fallo y de la inspección de sus condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones (4.11), las cuales se reescriben aquí para mayor facilidad

$$i_{P(F)}^b = -i_{P(F)}^c \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} v_{P(F)}^a &= Z_g i_{P(F)}^a \\ v_{P(F)}^b - v_{P(F)}^c &= Z_F i_{P(F)}^b \end{aligned} \quad (4.88)$$

Expresando (4.87) en función de sus componentes simétricas, teniendo en cuenta que $(a^2 + a) = -1$, se obtiene:

$$2 i_{P(F)}^{a0} - i_{P(F)}^{a1} - i_{P(F)}^{a2} = 0 \quad (4.89)$$

Expresando la segunda de las ecuaciones (4.88) en sus componentes simétricas y reemplazando (4.89) se obtiene:

$$\begin{aligned} (a^2 - a) v_{P(F)}^{a1} + (a - a^2) v_{P(F)}^{a1} &= Z_F \left[\frac{1}{2} (i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) + a^2 i_{P(F)}^{a1} + a i_{P(F)}^{a2} \right] \\ (a^2 - a) v_{P(F)}^{a1} + (a - a^2) v_{P(F)}^{a1} &= Z_F \left(\frac{1}{2} + a^2 \right) i_{P(F)}^{a1} + Z_F \left(\frac{1}{2} + a \right) i_{P(F)}^{a2} \\ -j\sqrt{3} v_{P(F)}^{a1} + j\sqrt{3} v_{P(F)}^{a2} &= Z_F \left(-j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) i_{P(F)}^{a1} + Z_F \left(j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) i_{P(F)}^{a2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$v_{P(F)}^{a1} - \frac{Z_F}{2} i_{P(F)}^{a1} = v_{P(F)}^{a2} - \frac{Z_F}{2} i_{P(F)}^{a2} \quad (4.90)$$

Similarmente, expresando la primera de las ecuaciones (4.88) en sus componentes simétricas, sumando y restando en el segundo miembro $\frac{Z_F}{2} (i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2})$ y, después, reemplazando (4.89) se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{P(F)}^{a0} + v_{P(F)}^{a1} + v_{P(F)}^{a2} &= Z_g (i_{P(F)}^{a0} + i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) + \frac{Z_F}{2} (i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) \\ &\quad - \frac{Z_F}{2} (i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) \\ v_{P(F)}^{a0} + \left(v_{P(F)}^{a1} - \frac{Z_F}{2} i_{P(F)}^{a1} \right) + \left(v_{P(F)}^{a2} - \frac{Z_F}{2} i_{P(F)}^{a2} \right) &= \\ &= (3Z_g - Z_F) i_{P(F)}^{a0} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Es decir, reemplazando (4.90) en (4.91)

$$v_{P(F)}^{a1} - \frac{Z_F}{2} i_{P(F)}^{a1} = -\frac{1}{2} [v_{P(F)}^{a0} - (3Z_g - Z_F) i_{P(F)}^{a0}] \quad (4.92)$$

Las ecuaciones (4.89), (4.90) y (4.92) se simulan en la interconexión de la Figura 4.17

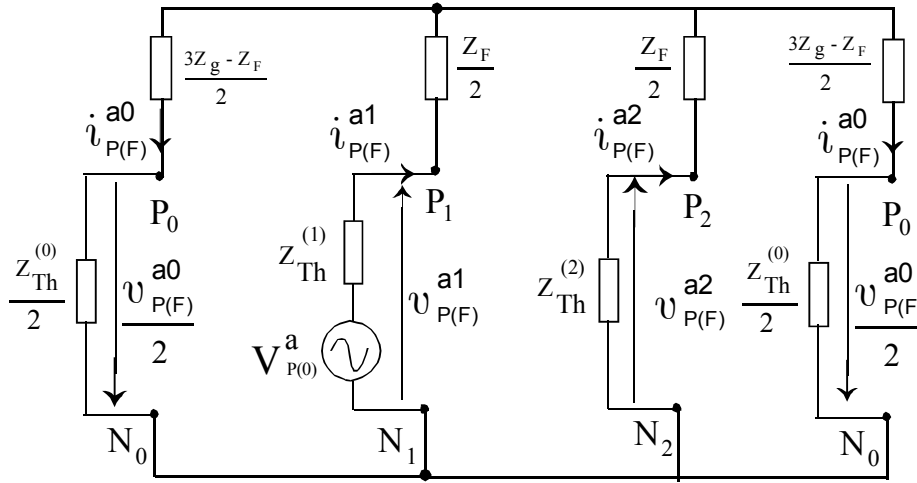


Figura 4.17. Interconexión de las redes de secuencia para el fallo simultáneo Línea-Tierra y Línea-Línea

Nótese la interconexión de las redes de secuencia para el fallo Línea-Línea entre las fases b y c se puede obtener también de la Figura 16 haciendo en ella $Z_g = \infty$

4.11.4 FALLO TRIFÁSICO SIMÉTRICO A TIERRA (L-L-L-G)

La Figura 4.18 muestra el diagrama de circuito y aplicando las leyes de K a las condiciones de frontera

$$v_{P(F)}^a = (Z_F + Z_g) i_{P(F)}^a + Z_g i_{P(F)}^b + Z_g i_{P(F)}^c \quad (4.93)$$

$$v_{P(F)}^b = Z_g i_{P(F)}^a + (Z_F + Z_g) i_{P(F)}^b + Z_g i_{P(F)}^c \quad (4.94)$$

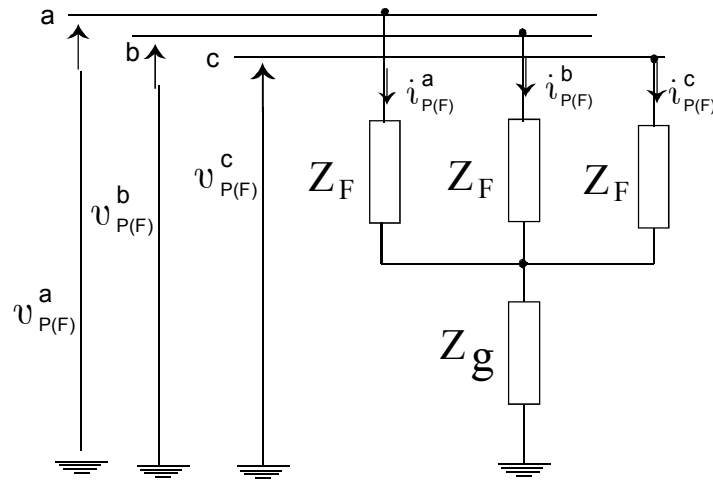


Figura 4.18. Diagrama de circuito del fallo trifásico simétrico a tierra LLL-G

$$v_{P(F)}^b = Z_g i_{P(F)}^a + Z_g i_{P(F)}^b + (Z_F + Z_g) i_{P(F)}^c \quad (4.95)$$

Expresando (4.93), (4.94) y (4.95) en componentes simétricas y teniendo en cuenta que $i_{P(F)}^a + i_{P(F)}^b + i_{P(F)}^c = 3 i_{P(F)}^{a0}$ [ver ecuación (4.62)] se obtiene:

$$v_{P(F)}^{a0} + v_{P(F)}^{a1} + v_{P(F)}^{a2} = Z_F (i_{P(F)}^{a0} + i_{P(F)}^{a1} + i_{P(F)}^{a2}) + 3 Z_g i_{P(F)}^{a0} \quad (4.96)$$

$$v_{P(F)}^{a0} + a^2 v_{P(F)}^{a1} + a v_{P(F)}^{a2} = Z_F (i_{P(F)}^{a0} + a^2 i_{P(F)}^{a1} + a i_{P(F)}^{a2}) + 3 Z_g i_{P(F)}^{a0} \quad (4.97)$$

$$v_{P(F)}^{a0} + a v_{P(F)}^{a1} + a^2 v_{P(F)}^{a2} = Z_F (i_{P(F)}^{a0} + a i_{P(F)}^{a1} + a^2 i_{P(F)}^{a2}) + 3 Z_g i_{P(F)}^{a0} \quad (4.98)$$

Sumando (4.96), (4.97) y (4.98) se obtiene después de dividir por 3

$$v_{P(F)}^{a0} - (Z_F + 3Z_g) i_{P(F)}^{a0} = 0 \quad (4.99)$$

Reemplazando (4.99) en (4.97) y en (4.98) y sumando las ecuaciones resultantes y restándolas después, se obtiene, respectivamente

$$(v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1}) = - (v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2}) \quad (4.100)$$

$$(v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1}) = - (v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2}) \quad (4.101)$$

Comparando (4.100) y (4.101) se nota una contradicción que solo puede ser superada si y sólo si

$$v_{P(F)}^{a1} - Z_F i_{P(F)}^{a1} = 0 \quad \wedge \quad v_{P(F)}^{a2} - Z_F i_{P(F)}^{a2} = 0 \quad (4.102)$$

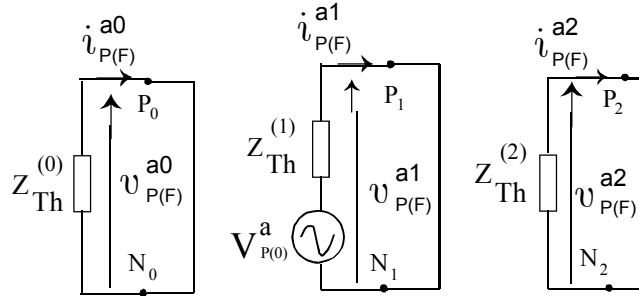


Figura 4.19. Interconexión de las redes de secuencia para el fallo trifásico simétrico a tierra

Las redes de secuencia de la Figura 4.19 satisfacen las condiciones (4.99) y (4.102).

Es decir, para este tipo de fallo únicamente se requiere la red de secuencia de positiva, como era de esperarse de la simetría del fallo y de la suposición de que el sistema de prefallo opera en condiciones de equilibrio, esto es, solamente están presentes componentes de secuencia positiva.

4.12 EJEMPLO DE CÁLCULO DE LAS CORRIENTES Y VOLTAJES DE CORTO-CIRCUITO POR EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS

Resolver el problema del Ejemplo 2 por el método de las componentes simétricas. El tipo de fallo considerado es el de la Figura 4.5 con los siguientes valores de impedancia:

$$Z_g = 0.1 \text{ p. u.} \quad Z_F = j 0.1 \text{ p. u.} \quad (4.103)$$

No es necesario realizar la multiplicación de matrices sugerida en (4.66) con los datos de la Tabla 1 y la matriz $[T_S^a]$ definida en (4.62) ya que este resultado se puede anticipar aplicando directamente (4.43) y (4.39) para obtener las impedancias de secuencia cero, positiva y negativa de cada elemento para conformar cada una de las redes de secuencia. Es decir,

$$\begin{aligned} z_{pq, pq}^{(0)} &= Z + 2M & z_{pq, pq}^{(1)} &= Z - M & z_{pq, pq}^{(2)} &= Z - M \\ z_{pq, rs}^{(0)} &= 3M & z_{pq, rs}^{(1)} &= 0 & z_{pq, rs}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

Similarmente, reemplazando (4.8) en (4.62) se obtienen las fuerzas electromotrices de los generadores de las redes de secuencia.

$$\begin{bmatrix} E_{k(0)}^{a0} \\ E_{k(0)}^{a1} \\ E_{k(0)}^{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} 1 \angle 0^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2 \quad (4.105)$$

Las Figuras 4.20, 4.22, y 4.23 muestran, respectivamente, las redes de secuencia cero, positiva y negativa del sistema de prefallo y sus correspondientes equivalentes de Thévenin.

Aplicando (4.39) con los datos de la Tabla 1 se obtienen los valores de impedancias en

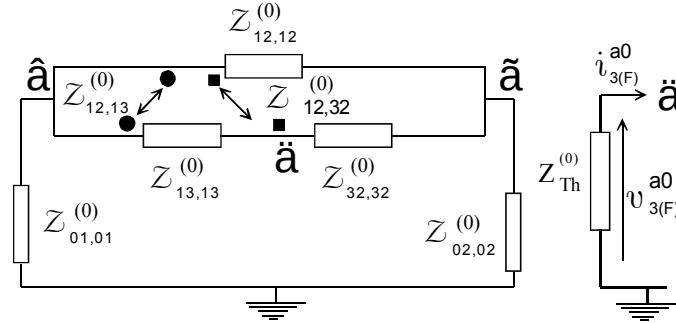


Figura 4.20. Red de secuencia cero del sistema de la Figura 4.7

tanto por uno de la ecuación (4.106):

$$\begin{array}{lll}
 z_{01,01}^{(0)} = j 0.035 & z_{01,01}^{(1)} = j 0.1025 & z_{01,01}^{(2)} = j 0.1025 \\
 z_{02,02}^{(0)} = j 0.035 & z_{02,02}^{(1)} = j 0.1025 & z_{02,02}^{(2)} = j 0.1025 \\
 z_{12,12}^{(0)} = j 2.5 & z_{12,12}^{(1)} = j 1 & z_{12,12}^{(2)} = j 1 \\
 z_{13,13}^{(0)} = j 1 & z_{13,13}^{(1)} = j 0.4 & z_{13,13}^{(2)} = j 0.4 \\
 z_{32,32}^{(0)} = j 1.5 & z_{32,32}^{(1)} = j 0.6 & z_{32,32}^{(2)} = j 0.6 \\
 z_{12,13}^{(0)} = j 0.6 & z_{12,13}^{(1)} = j 0 & z_{12,13}^{(2)} = j 0 \\
 z_{12,32}^{(0)} = j 0.9 & z_{12,32}^{(1)} = j 0 & z_{12,32}^{(2)} = j 0
 \end{array} \quad (4.106)$$

Fácilmente se puede verificar que con los valores dados en (4.106) y en (4.105) los de los equivalentes de Thévenin son los siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 Z_{Th}^{(0)} = j 0.618777 & Z_{Th}^{(1)} = j 0.29268 & Z_{Th}^{(2)} = j 29268 \\
 V_{Th}^{a0} = 0 & V_{Th}^{a1} = 1.0 & V_{Th}^{a2} = 0
 \end{array} \quad (4.107)$$

Resolviendo el circuito de la Figura 4.17 para los valores dados en (4.103) y en (4.107) se obtienen las siguientes respuestas.

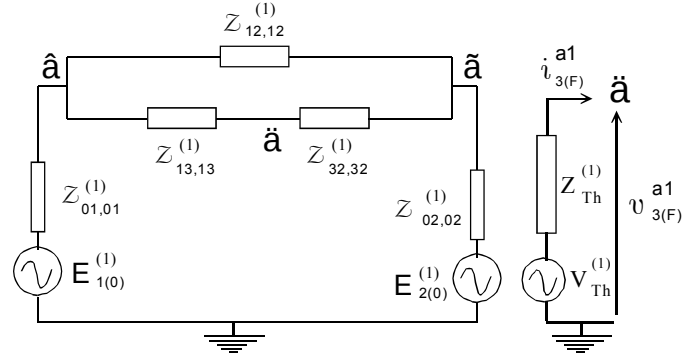


Figura 4.21. Red de secuencia positiva del sistema de la Figura 4.7

$$\begin{aligned}
 i_{3(F)}^{a0} &= 0.806215 \angle -76.0^\circ & i_{3(F)}^{a1} &= 2.249825 \angle -85.03^\circ \\
 i_{3(F)}^{a2} &= 0.704362 \angle 73.92^\circ
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

Reemplazando los valores (4.106) en las redes de secuencia cero, positiva y negativa, excitando cada una de ellas mediante una fuente de corriente entre el nodo 3 y el de referencia de valor igual a la correspondiente componente de secuencia de las corrientes de fallo obtenidas en (4.108), se obtienen, respectivamente, los circuitos de las siguientes Figuras, de cuya solución (en función de corrientes de enlace en este caso) se pueden obtener las siguientes componentes de secuencia de las corrientes y/o de los voltajes a través de los elementos del sistema. Es decir,

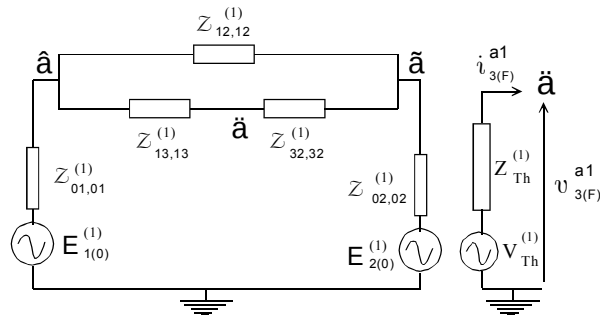


Figura 4.22. Red de secuencia positiva del sistema de la Figura 4.7

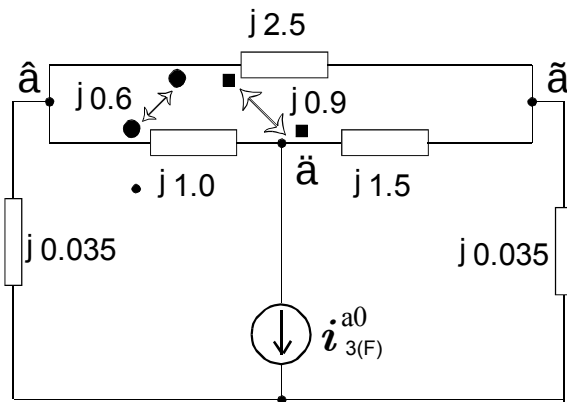


Figura 4.23 Red de secuencia cero del sistema del ejemplo

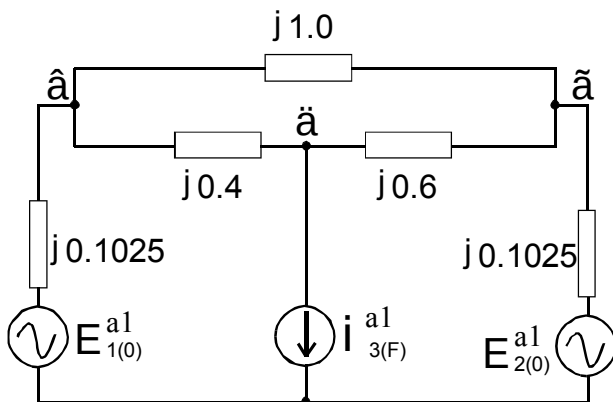


Figura 4.24 Red de secuencia positiva del sistema del ejemplo

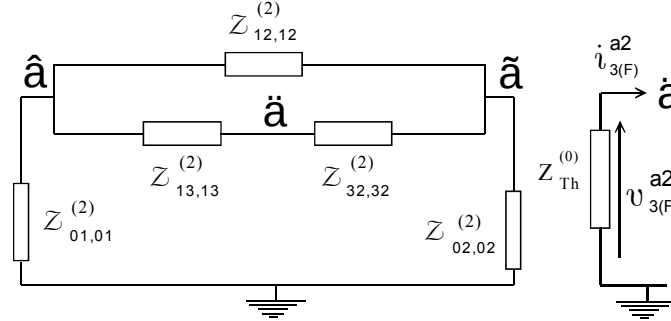


Figura 4.23. Red de secuencia negativa del sistema de la Figura 4.7

$$\begin{aligned}
 i_{12(F)}^{a0} &= 0.016201 \angle -91.04^\circ & i_{13(F)}^{a0} &= 0.567337 \angle -77.30^\circ \\
 i_{12(F)}^{a1} &= 0.018535 \angle -99.64^\circ & i_{13(F)}^{a1} &= 1.276383 \angle -81.70^\circ \\
 i_{12(F)}^{a2} &= 0.028319 \angle -96.29^\circ & i_{13(F)}^{a2} &= 0.433703 \angle 85.21^\circ
 \end{aligned} \quad (4.109)$$

Fácilmente se puede verificar que reemplazando (4.109) en (4.62) se obtienen los mismos valores ya obtenidos en (4.22).

4.13 POTENCIA DE CORTO CIRCUITO

Para sistematizar el cálculo de las corrientes totales de fallo se requieren las impedancias de Thévenin entre cada uno de los nodos y el de referencia de cada una de las redes de secuencia¹⁴, es decir, los elementos diagonales de las correspondientes matrices impedancia de nodos. Para evaluar las corrientes a través de los elementos conectados al fallo, en el nodo k -ésimo nodo por ejemplo, se necesitan, además, unos pocos de los elementos no diagonales Z_{ik} .

Cuando se proyecta el montaje de una industria o de una urbanización, es decir, cuando se requieren ampliaciones del sistema con el propósito de adicionarle una carga importante, generalmente se conecta a la red existente a través de una subestación cercana de

¹⁴ Recuérdese que la red de secuencia negativa se supone idéntica a la de secuencia positiva debido a que el número de generadores es incomparablemente menor con respecto a la suma de líneas de transmisión y transformadores.

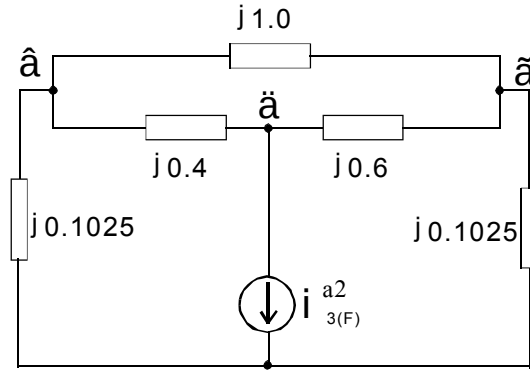


Figura 4.24. Figura 4.25 Red de secuencia negativa del sistema del ejemplo

acuerdo a su ubicación. Para calcular la capacidad interruptiva de los elementos de protección se necesitan las impedancias de Thévenin entre el nodo que corresponde a dicha subestación en cada una de las redes de secuencia y el de referencia. Recuérdese que en estudios de corto circuito se acostumbra suponer que antes del fallo el sistema opera en condiciones balanceadas y, por tanto, solamente se presentan corrientes y voltajes en la red de secuencia positiva y en esta secuencia los voltajes de nodo son todos iguales a un valor $1.0\angle 0^\circ$ en tanto por uno.

En vez de suministrar las impedancias de Thévenin $Z_{th}^{(0)}$ y $Z_{th}^{(1)}$ las empresas electrificadoras suministran la *potencia de corto circuito monofásica* $(MVA)_{SC-1\Phi}$ y *trifásica* $(MVA)_{SC-3\Phi}$. en una subestación dada que es la total que suministra el sistema para un fallo sólido del mismo tipo en dichas subestación a partir de las cuales se pueden calcular aquéllas.

La justificación del algoritmo para obtenerlas se basa en la anterior definición de potencia de corto circuito, es decir,

$$\begin{aligned} (MVA)_{SC-3\Phi} &= \sqrt{3} V_{L(0)} I_{SC-3\Phi} \\ (MVA)_{SC-1\Phi} &= V_{p(0)} I_{SC-1\Phi} \end{aligned} \quad (4.110)$$

donde $V_{L(0)}$ y $V_{p(0)}$ son, respectivamente, el voltaje entre líneas y el de fase en el punto de fallo antes de producirse éste, es decir, los voltajes nominales de la subestación. También en (4.110) $I_{SC-3\Phi}$ e $I_{SC-1\Phi}$ son las corrientes totales a través del fallo.

Cuando se toman los voltajes base idénticos a los nominales de la subestación es decir,

$$\begin{aligned} V_{bL} &= V_{L(0)} \\ V_b &= V_{p(0)} \end{aligned} \quad (4.111)$$

donde V_{bL} y V_b son, respectivamente, el voltaje base entre líneas y el voltaje base monofásico

y recordando que

$$\begin{aligned} V_{L(0)} &= \sqrt{3} V_{p(0)} \\ V_{bL} &= \sqrt{3} V_b \\ S_{b-3\Phi} &= 3S_{b-1\Phi} = \sqrt{3} V_{bL} I_{bL} \\ S_{b-1\Phi} &= V_b I_{bL} \end{aligned} \quad (4.112)$$

Dividiendo el primer miembro de la primera de las ecuaciones (4.110) por $S_{b-3\Phi}$ y el segundo por su equivalente $\sqrt{3} V_{bL} I_{bL}$ [ver ecuación (4.112)] y aplicando (4.111) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{sc-3\Phi} &= \frac{(MVA)_{SC-3\Phi}}{S_{b-3\Phi}} = \frac{\sqrt{3} V_{L(0)} I_{SC-3\Phi}}{\sqrt{3} V_{bL} I_{bL}} \\ &= \hat{I}_{SC-3\Phi} = \frac{1}{\hat{Z}_{th}^{(1)}} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Similarmente dividiendo el primer miembro de la segunda de las ecuaciones (4.110) por $S_{b-3\Phi}$ y el segundo por su equivalente $\sqrt{3} V_{bL} I_{bL}$ [ver ecuación (4.112)] y aplicando (4.111) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{b-1\Phi} &= \frac{(MVA)_{SC-1\Phi}}{S_{b-3\Phi}} = \frac{V_{p(0)} I_{SC-1\Phi}}{\sqrt{3} V_{bL} I_{bL}} = \frac{V_{p(0)} I_{SC-1\Phi}}{\sqrt{3} (\sqrt{3} V_b) I_{bL}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{I_{SC-1\Phi}}{I_{bL}} = \frac{1}{3} \hat{I}_{SC-1\Phi} \end{aligned} \quad (4.114)$$

donde se ha hecho uso de (4.112)(b) y se nota que *la corriente total a través del fallo monofásico es una corriente de línea de una carga trifásica desbalanceada*.

Para el fallo sólido monofásico se tiene que

$$\hat{I}_{SC-1\Phi} = 3\hat{I}_{SC}^{a0} = 3 \frac{1}{2\hat{Z}_{th}^{(1)} + \hat{Z}_{th}^{(0)}} \quad (4.115)$$

Reemplazando (4.115) en (4.114) se obtiene:

$$\hat{S}_{SC-1\Phi} = \frac{(MVA)_{SC-1\Phi}}{S_{b-3\Phi}} = \frac{1}{2\hat{Z}_{th}^{(1)} + \hat{Z}_{th}^{(0)}} \quad (4.116)$$

Del análisis anterior se puede extraer el siguiente **ALGORITMO para obtener las impedancias de Thévenin en tanto por uno a partir de las correspondientes potencias de corto circuito monofásica y trifásica en una subestación dada**

- 1 Elegir arbitrariamente el valor de la potencia base trifásica $S_{b-3\phi}$. Elegir como voltaje base el de la correspondiente subestación [ver ecuación(4.111)]
- 2 Definir

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SC-3\phi} &= \frac{MVA_{SC-3\phi}}{S_{b-3\phi}} \\ \hat{S}_{SC-1\phi} &= \frac{MVA_{SC-1\phi}}{S_{b-3\phi}} \end{aligned}$$

donde $S_{b-3\phi}$ es la potencia base trifásica, elegida *arbitrariamente*

- 3 De(4.113) se obtiene

$$\hat{Z}_{th}^{(1)} = \frac{1}{\hat{S}_{SC-3\phi}}$$

- 4 La impedancia de secuencia positiva se obtiene a partir de la expresión (4.116)

$$\frac{1}{\hat{S}_{SC-1\phi}} = \frac{1}{2\hat{Z}_{th}^{(1)} + \hat{Z}_{th}^{(0)}}$$

En la discusión anterior se entiende que tanto $\hat{Z}_{th}^{(0)}$ como $\hat{Z}_{th}^{(1)}$ son de naturaleza reactiva.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] EL-ABIAD, Ahmed H. and Glenn W. STAGG, “*Computer Methods in Power System Analysis*”, McGraw-Hill, 1 edición, 1973.
- [2] ANDERSON, Paul M., “*Analysis of Faulted Power Systems*”, IowaState University Press, 1973.
- [3] ELGERD, Olle I., “*Energy Systems Theory: An Introduction*”, McGraw-Hill, 1 edición, 1971.
- [4] GRAINGER, Jhon D. y William D. STEVENSON, “*Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*”, McGraw-Hill, 2 edición, 1979.

Apéndice D

REPRESENTACIÓN DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO EN ESTUDIOS DE CORTO CIRCUITO

D.1 OBJETIVO

Obtener y justificar el circuito equivalente simplificado del transformador trifásico de potencia en cada una de las redes de secuencia, teniendo en cuenta las conexiones internas y la asignación de fases a sus terminales exteriores.

D.2 CONEXIONES INTERNAS

Las normas americanas exigen a los fabricantes de transformadores trifásicos de potencia:

- 1 Identificar los terminales exteriores de alta tensión mediante las letras H_1 , H_2 y H_3 y con X_1 , X_2 y X_3 los de baja¹⁵ Cuando la conexión es en estrella (Y) se utiliza X_0 y/o H_0 para designar el neutro correspondiente¹⁶
- 2 Que las conexiones internas se hagan de tal manera que los terminales marcados (de la misma polaridad relativa u homólogos) de los devanados abrazados a la misma columna satisfagan los diagramas de la Figura D.1

¹⁵ Las normas europeas se refieren a ambos terminales de cada devanado: reserva las letras $U - X$, $V - Y$ y $W - Z$ para identificar los de alta tensión y las mismas letras minúsculas, es decir, $u - x$, $v - y$ y $w - z$, para designar los de baja correspondientes que van abrazados a la misma columna. En el

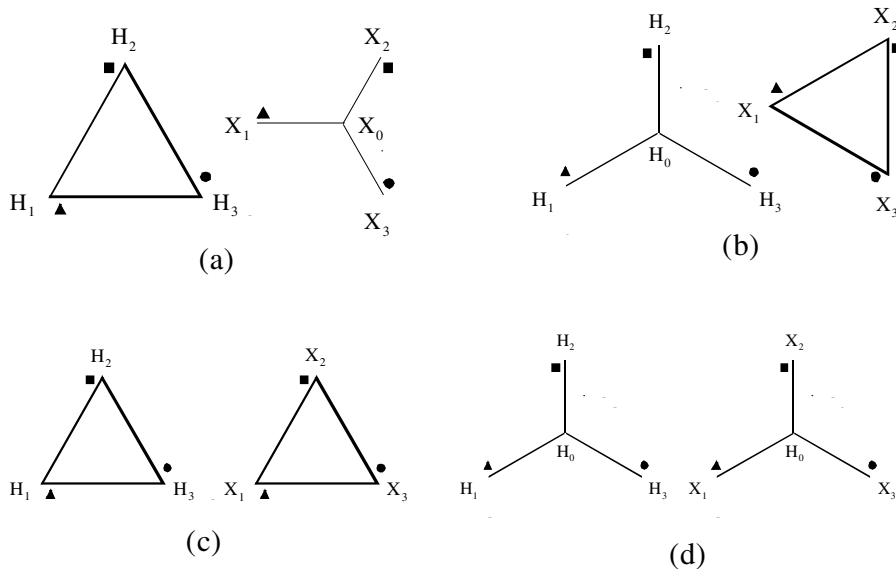


Figura D.1. Diagramas de conexiones internas de los transformadores de potencia trifásicos de acuerdo a la norma americana

Las posiciones relativas de los terminales en el tanque del transformador son tales que cuando se observa de frente el lado correspondiente el terminal H_1 debe ir a la derecha mientras que el X_1 debe ir a la izquierda. Similarmente el terminal H_0 y/o X_0 deben ubicarse, respectivamente, a la derecha e izquierda de los terminales H_1 y X_1 , como se muestra en la Figura D.2

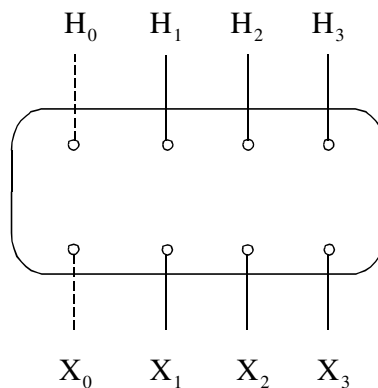


Figura D.2. Posiciones relativas de los terminales en el tanque de un transformador de acuerdo a la norma americana

tanque los terminales exteriores se distinguen únicamente mediante una de estas letras.

¹⁶ Para un estudio más detallado el lector interesado debe referirse a la norma ANSI C57.12.70-1978 “American National Standard Terminal Markings and Connections for Distribution and Power Transformers”

Los diagramas de la Figura D.1 se realizan dibujando los terminales de alta tensión adelantados a los de baja correspondientes, es decir, identificados similarmente:

- 1) 30° para conexiones $Y - \Delta$ o $\Delta - Y$ (independientemente de cual sea el de alta).
- 2) 0° para conexiones $Y - Y$ o $\Delta - \Delta$

Vale la pena enfatizar que aunque los diagramas de la Figura D.1 tienen la apariencia de diagramas fasoriales de voltajes equilibrados, realmente no lo son. Así, por ejemplo, en el de la Figura D.1(b), que corresponde a una conexión Y en el lado de alta y Δ en el de baja, el paralelismo entre $H_2 - H_0$ y $X_2 - X_3$, significa que ambos devanados van abrazados a la misma columna y sus polaridades relativas son como indican las marcas cuadradas. Una interpretación similar se aplica a los demás pares de devanados.

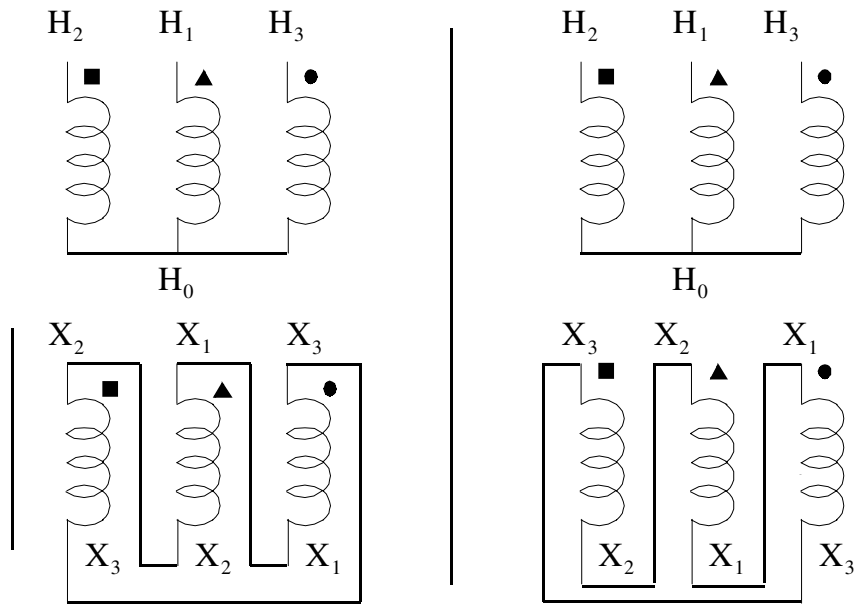


Figura D.3. Dos alternativas, de entre muchas, para conectar los devanados de un transformador $Y - \Delta$ para que satisfaga la norma expresada en el diagrama de la Figura D.1(b)

La figura D.3 muestra dos maneras diferentes de interconectar los devanados de una unidad trifásica para que satisfaga el diagrama de la Figura D.1(b). Nótese que, no importa cuán desbalanceados sean los voltajes aplicados, las conexiones internas garantizan que despreciando el efecto de la impedancia de dispersión, $\hat{V}_{H_2-H_0} = \hat{V}_{X_2-X_3}$ es

decir, suponiendo condiciones ideales, siempre se cumple la coincidencia de fase¹⁷ entre:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{H_2-H_0} &= \hat{V}_{X_2-X_3} \\ \hat{V}_{H_1-H_0} &= \hat{V}_{X_1-X_2} \\ \hat{V}_{H_3-H_0} &= \hat{V}_{X_3-X_1}\end{aligned}\tag{D.1}$$

Similarmente, para transformadores cuyo lado de alta tenga conexión Δ y cuyo lado de baja se conecte en Y , al que corresponde el diagrama de conexiones de la Figura D.1(c), se debe cumplir la ecuación (D.2) independiente del las condiciones de desbalance de los voltajes aplicados. Es decir

$$\begin{aligned}\hat{V}_{H_2-H_1} &= \hat{V}_{X_2-X_0} \\ \hat{V}_{H_1-H_3} &= \hat{V}_{X_1-X_0} \\ \hat{V}_{H_3-H_2} &= \hat{V}_{X_3-X_0}\end{aligned}\tag{D.2}$$

Vale la pena aclarar que la secuencia de rotación de los voltajes en los terminales (V_{H_1}, V_{H_2} y V_{H_3} y/o V_{X_1}, V_{X_2} y V_{X_3}), es decir, $1-2-3$ o $1-3-2$, la determina la forma como se conecten éstos con los del circuito trifásico de suministro, cuyas fases se identifican mediante las letras A, B y C en el lado de alta y las mismas letras minúsculas, a, b y c , en el de baja.

Cuando se realizan las conexiones internas de acuerdo a la norma descrita y los voltajes de fase en uno de los lados es en una secuencia determinada, $1-2-3$ o $1-3-2$, en el otro se obtiene la misma secuencia. Es decir, los subíndices indican el orden de rotación de los voltajes cuando los terminales se conectan de una manera lógica. Así, por ejemplo, si la secuencia del circuito de suministro es $a-b-c$ y estas fases se conectan a los terminales X_1, X_2 y X_3 , respectivamente, entonces en alta la secuencia de rotación de los voltajes será V_{H_1}, V_{H_2} y V_{H_3} .

¹⁷ Cuando dichos voltajes se expresan en tanto por uno, es decir, dividiéndolos por el valor de voltaje base (de fase o de línea) que le corresponda, se satisface no solamente la coincidencia de fase, sino también la igualdad en sus magnitudes.

D.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR EN LA RED DE SECUENCIA POSITIVA Y NEGATIVA

La asignación de fases a los terminales del transformador debe hacerse de tal manera que cuando se aplique un conjunto balanceado de voltajes de una secuencia dada ($a - b - c$ o $a - c - b$) en uno de sus lados en el otro también se obtengan voltajes de la misma secuencia. Las mostradas en la Figura D.4 parten de una básica (a) y las demás se obtienen:

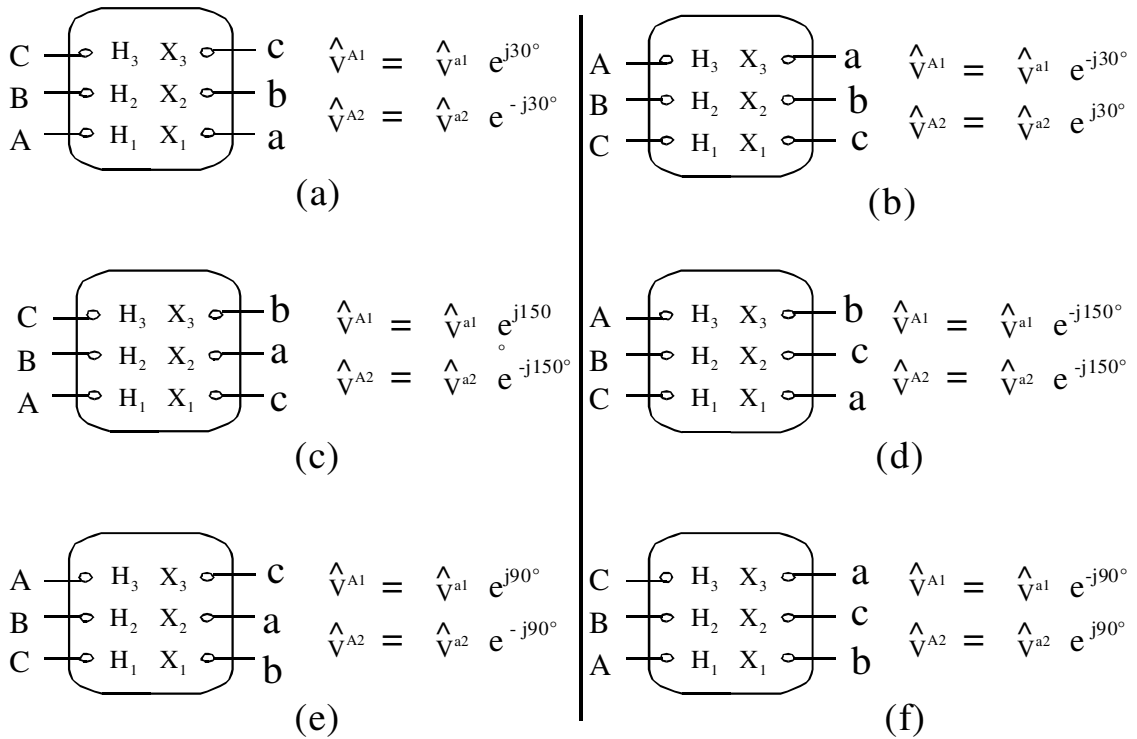


Figura D.4. Desplazamientos angulares de las componentes de secuencia de voltajes de fase y corrientes de línea en transformadores $\Delta - Y$ y $Y - \Delta$.

- 1 Intercambiando dos veces dos fases en el lado de baja (c) y (f)
- 2 Intercambiando en cada uno de los anteriores dos fases tanto en el lado de alta como en el de baja.

La Figura D.4 ilustra los desplazamientos angulares, entre las componentes de secuencia, tanto positiva como negativa, de los voltajes del lado de alta y las de la misma secuencia de los de baja, que se pueden obtener en transformadores $\Delta - Y$ - y/o $Y - \Delta$. Nótese que, en cada caso, el desfase entre las componentes de secuencia negativa en uno y otro lado es el conjugado del que se da entre las de secuencia positiva, y viceversa. Los resultados de la Figura D.4 se pueden obtener mediante la siguiente secuencia de instrucciones:

- 1 Realizar la asignación de fases del caso en estudio en el diagrama de la Figura D.1 correspondiente.
- 2 Identificar la secuencia del diagrama fasorial resultante y verificar que sea la misma en ambos lados
 - a Si resulta ser $A-B-C$ ($a-b-c$) identificar los voltajes como de secuencia positiva mediante los superíndices A_1, B_1 y C_1 en alta y a_1, b_1 y c_1 en baja.
 - b Si se obtiene $A-C-B$ ($a-c-b$) identificar los voltajes como de secuencia negativa mediante los superíndices A_2, B_2 y C_2 en alta y a_2, b_2 y c_2 en baja. Recuérdese que se supone que el diagrama gira en el sentido positivo trigonométrico o contrario al de las manecillas del reloj.
- 3 De la inspección del diagrama fasorial de voltajes resultante se obtiene el desplazamiento angular para la secuencia obtenida en 2. Como ya se hizo notar el desplazamiento angular de la otra secuencia es el conjugado de la anterior.

D.4 EJEMPLO

Suponer que la asignación de fases de un transformador cuyo lado de alta se ha conectado en Δ y cuyo lado de baja está en Y es el de la Figura D.4(c). El diagrama de conexiones que le corresponde a este caso es el de la Figura D.1(c) a partir del cual, realizando la asignación de fases de la Figura D.4(c), se obtiene el de la Figura 4 de cuya inspección se puede leer:

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^{A1} &= \hat{V}^{a1} e^{j150^\circ} & \hat{V}^{A2} &= \hat{V}^{a2} e^{-j150^\circ} \\
 \hat{V}^{B1} &= \hat{V}^{b1} e^{j150^\circ} & \hat{V}^{B2} &= \hat{V}^{b2} e^{-j150^\circ} \\
 \hat{V}^{C1} &= \hat{V}^{c1} e^{j150^\circ} & \hat{V}^{C2} &= \hat{V}^{c2} e^{-j150^\circ}
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Como se hizo notar antes, el desplazamiento angular obtenido para la componente de

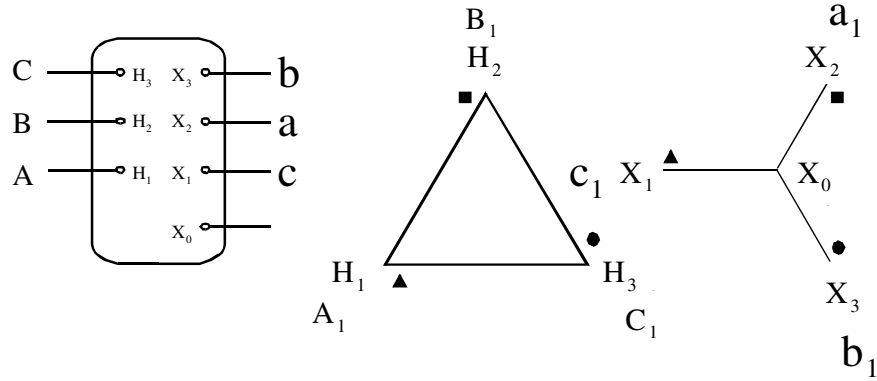


Figura D.5. Desplazamiento angular entre las componentes de secuencia del voltaje de un lado y el de la misma secuencia en el otro para un transformador $\Delta - Y$ con la asignación de fases mostrada

secuencia positiva es el conjugado del de la de secuencia negativa y viceversa.

Fácilmente se puede verificar que el mismo resultado se hubiera obtenido a partir de la asignación de fases de la Figura D.4(c) y el diagrama de conexiones de la Figura D.3(d), es decir, suponiendo el lado de alta conectado en Y y el de baja en Δ . Esta conclusión es válida para todos los casos de la Figura D.4.

El análisis del desfase entre las componentes de la misma secuencia, positiva o negativa, de las corrientes de línea en uno y otro lado se puede realizar recordando que en el transformador monofásico ideal cuando los sentidos de referencia de las corrientes se escogen del terminal marcado al no marcado en uno de los devanados y del no marcado al marcado en el otro presentan coincidencia de fase, como se ilustra en la Figura D.6, en base a la cual se puede obtener:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{X_1} &= \hat{I}_{H_1-H_3} \\ \hat{I}_{X_2} &= \hat{I}_{H_2-H_1} \\ \hat{I}_{X_3} &= \hat{I}_{H_3-H_2}\end{aligned}\tag{D.4}$$

Cuando las corrientes de línea se definen en uno de los lados del transformador entrando y en el otro saliendo de éste

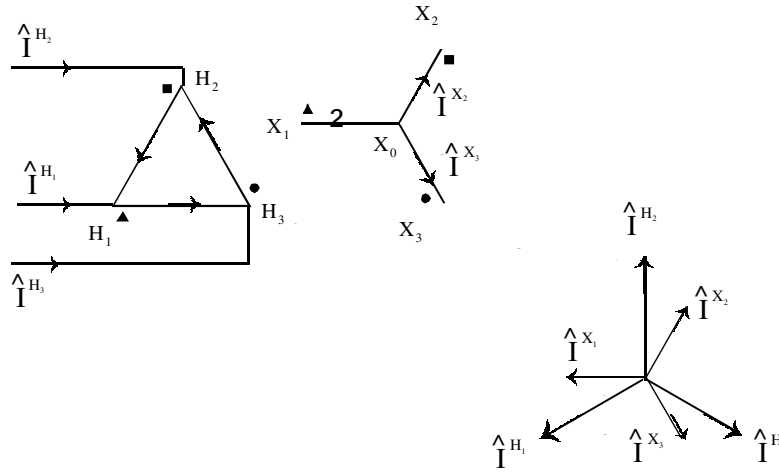


Figura D.6. Diagrama que muestra que las relaciones de fase entre las componentes de secuencia de las corrientes de línea en ambos lados del transformador cuando en un lado se definen saliente y en el otro entrando al transformador

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{H_1} &= \hat{I}_{H_1-H_3} - \hat{I}_{H_2-H_1} = \hat{I}_{X_1} - \hat{I}_{X_2} \\
 \hat{I}_{H_2} &= \hat{I}_{H_2-H_1} - \hat{I}_{H_3-H_2} = \hat{I}_{X_2} - \hat{I}_{X_3} \\
 \hat{I}_{H_3} &= \hat{I}_{H_3-H_2} - \hat{I}_{H_1-H_3} = \hat{I}_{X_3} - \hat{I}_{X_1}
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Nótese que (D.4) y (D.5) son independientes de las condiciones de desbalance y de la asignación de fases a los terminales del transformador. Sin embargo, cuando se supone un conjunto balanceado de corrientes y se hace una asignación de fases, la básica de la Figura D.1(a), por ejemplo, la Figura D.6 puede interpretarse como un diagrama fasorial. Se puede concluir entonces que *el desfase entre las componentes de la misma secuencia de las corrientes de línea en uno y otro lado del transformador es el mismo que el de los voltajes de la misma secuencia siempre y cuando dichas corrientes de línea se definan entrando en uno de los lados del transformador y saliendo de éste en el otro.*

En la discusión anterior se ha despreciado el desfase debido a la impedancia de dispersión o de corto circuito $\hat{z}_{SC}$ la cual se debe tener en cuenta conectándola en serie con un desfaseador ideal como se muestra en la Figura D.7.

Nótese que *el desfaseador ideal no tiene ningún efecto en la impedancia equivalente de Thévenin*, ya que tanto las componentes de secuencia, positiva y/o negativa por ejemplo, de los voltajes en uno y otro lado del transformador como las de la misma secuencia de las corrientes de línea sufren el mismo desplazamiento angular. Es decir,

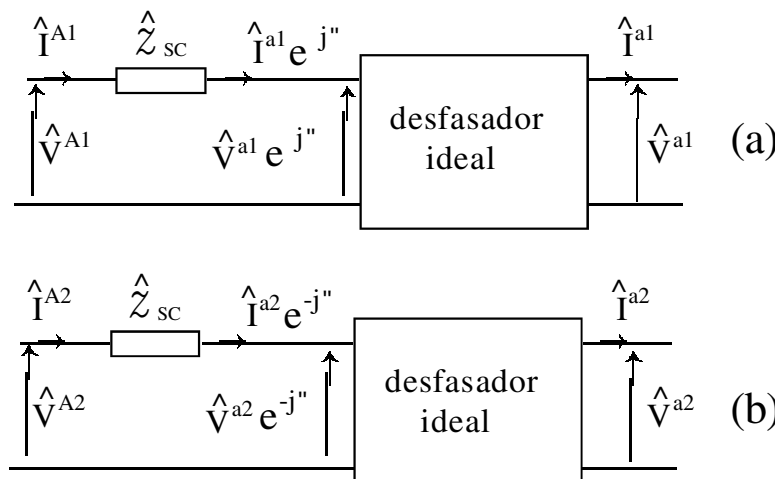


Figura D.7. Circuito equivalente del transformador trifásico para la red de secuencia positiva (a) y negativa (b) teniendo en cuenta el desplazamiento angular introducido por la conexión y la impedancia de dispersión

para obtener la impedancia de Thévenin en la red de secuencia positiva y en la negativa se pueden ignorar los desfasadores ideales, los cuales no tienen incidencia, por lo tanto, en las corrientes totales a través del fallo.

Fácilmente se puede demostrar que es indiferente en que lado se conecta la impedancia de dispersión. Se deja como ejercicio verificar la equivalencia entre los circuitos de la Figura D.7 y los de la Figura D.8

D.5 CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO EN LA RED DE SECUENCIA CERO

La representación por fase del $Y-Y$ equivalente de un conjunto de tres transformadores monofásicos idénticos sometidos a una conexión trifásica utiliza la misma impedancia de cortocircuito para cualquiera de las redes de secuencia puesto que cada transformador individual presenta la misma impedancia a cualquier voltaje aplicado y ninguno de ellos es consciente de la secuencia de éstos. Sin embargo, para obtener un circuito equivalente que refleje su comportamiento se deben tener en cuenta los siguientes criterios:

- 1 La expresión para la componente de secuencia cero de tres corrientes desbalanceadas

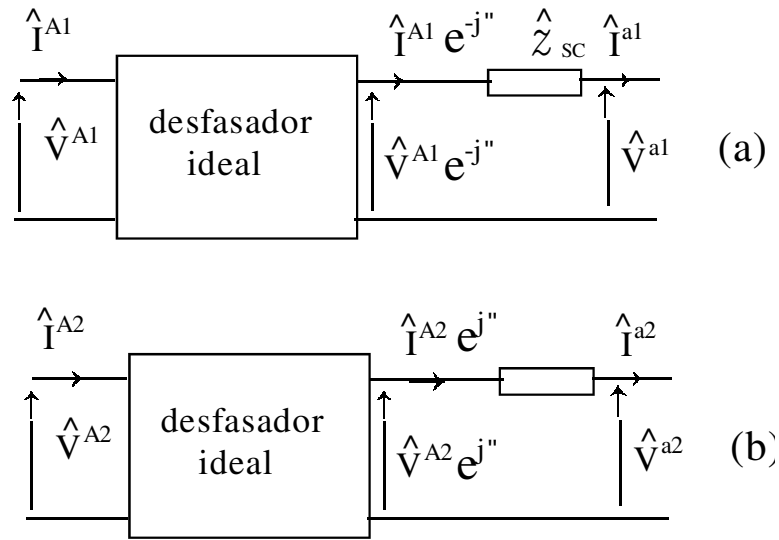


Figura D.8. Circuito equivalente del transformador trifásico para la red de secuencia positiva (a) y negativa (b) teniendo en cuenta el desplazamiento angular introducido por la conexión y la impedancia de dispersión

es

$$i_{pq(F)}^{a0} = \frac{1}{3} (i_{pq(F)}^a + i_{pq(F)}^b + i_{pq(F)}^c) \quad (D.6)$$

Una consecuencia de (D.6) es que en una conexión Y con neutro aislado la componente de secuencia cero de las corrientes de línea es cero. Cuando el neutro se conecta a tierra a través de una impedancia Z_g por ella circula $i_{pq(F)}^a + i_{pq(F)}^b + i_{pq(F)}^c$ que es tres veces la componente de secuencia cero. Puesto que la red de secuencia cero representa una fase en la que se supone circula por cada elemento $i_{pq(F)}^{a0}$ se debe incluir en ella una impedancia conectada al nodo de referencia $3Z_g$ para calcular correctamente el voltaje del neutro con respecto a tierra.

- 2 En un banco o transformador trifásico $Y - Y$ con el neutro aislado en uno de los lados (el de alta por ejemplo) y sólidamente conectado a tierra en el otro, se cumple que

$$i^{a0} = \frac{1}{3} (i^a + i^b + i^c) = \frac{k}{3} (i^A + i^B + i^C) = i^{A0} = 0 \quad (D.7)$$

como quiera que los tres pares de devanados son idénticos y tienen la misma relación de transformación k .

- 3 La componente de secuencia cero de las corrientes de línea de una conexión Δ es igual

a cero, lo cual se puede verificar fácilmente aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada nodo de la Δ :

$$\begin{aligned} i^A &= i^{AB} - i^{CA} \\ i^B &= i^{BC} - i^{AB} \\ i^C &= i^{CA} - i^{BC} \\ i^{A0} &= \frac{1}{3} (i^A + i^B + i^C) = 0 \end{aligned}$$

resultado que no sorprende si se tiene en cuenta, además, que las 3 líneas (fases) de la constituyen un corte. Sin embargo, en los elementos de la Δ pueden circular componentes de secuencia cero, lo que se simula cortocircuitando ambos terminales de una impedancia (conectándolos a tierra, por ejemplo) y un circuito abierto al exterior.

La Figura D.9 muestra las conexiones que se pueden hacer a un banco de transformadores monofásicos o a los 3 pares de devanados de un transformador trifásico y su correspondiente circuito equivalente por fase del $Y - Y$ equivalente (despreciando la corriente de excitación) para la red de secuencia cero, cada uno de los cuales se obtiene aplicando los criterios descritos.

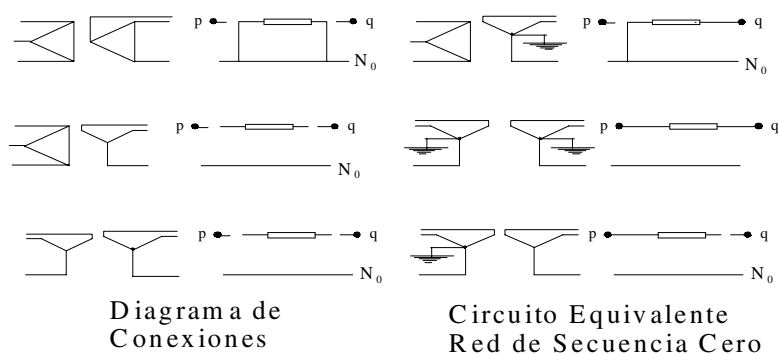


Figura D.9. Representación de una fase del $Y - Y$ equivalente de un transformador trifásico de dos devanados por fase en la red de secuencia cero

La Figura D.10 muestra el circuito equivalente de una fase del $Y - Y - Y$ equivalente de transformadores trifásicos de tres devanados por fase para diferentes conexiones.

En la anterior discusión se ha despreciado la corriente de excitación, razón por la cual *no se ha incluido en los circuitos equivalentes la admitancia paralelo. Esta aproximación es acertada para bancos de 3 unidades monofásicas independientes.* Sin embargo, en transformadores trifásicos los devanados van montados en un mismo núcleo

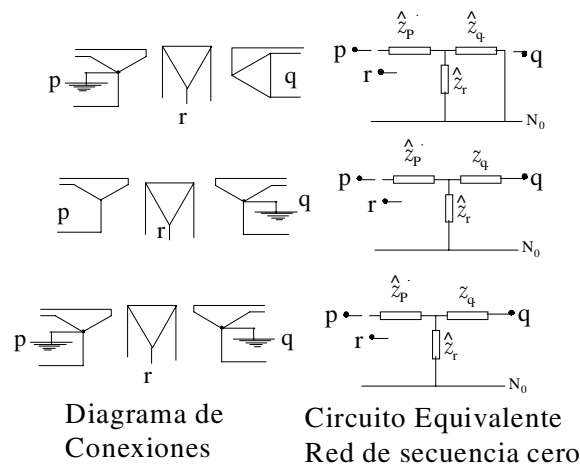


Figura D.10. Representación del transformador trifásico de 3 devanados por fase en la red de secuencia cero

y, por tanto, los flujos comparten un circuito magnético común. La Figura D.11 muestra los dos diseños más comunes de transformadores trifásicos que se les denomina tipo columna (a) y acorazado (b), respectivamente.

Nótese que mientras en el tipo columna los devanados se arrollan en el mismo sentido (se han representado únicamente los primarios) en el acorazado el correspondiente a la fase central se opone a los exteriores. En ambos tipos cuando circulan corrientes balanceadas de secuencia positiva o negativa a través de los devanados aproximadamente todo el flujo magnético se confina a través del hierro y por tanto la corriente de excitación es despreciable y se puede omitir la admitancia paralelo de los circuitos equivalentes para la red de secuencia positiva y negativa de cualquiera de los dos tipos de transformadores.

La impedancia de secuencia cero de un transformador trifásico se puede obtener a partir de mediciones cuando se aplican voltajes de esa secuencia. Si la prueba de corto circuito no satura el núcleo la impedancia de fuga medida es aproximadamente igual que cuando se excita con voltajes de secuencia positiva o negativa.

Sin embargo, la prueba en vacío revela una diferencia fundamental entre el tipo columna y el acorazado, lo cual se debe a los distintos patrones de flujo inherentes a cada uno de los diseños como se ilustra en la Figura D.11: En el transformador tipo columna la suma de los flujos magnéticos de secuencia cero de sus 3 fases es diferente de cero. Puesto que las líneas de flujo de campo magnético deben ser cerradas el flujo $3\phi_0$ debe buscar una trayectoria a través del aire y/o del tanque del transformador las cuales presentan *una reluctancia muy alta, lo que resulta en una impedancia de excitación de*

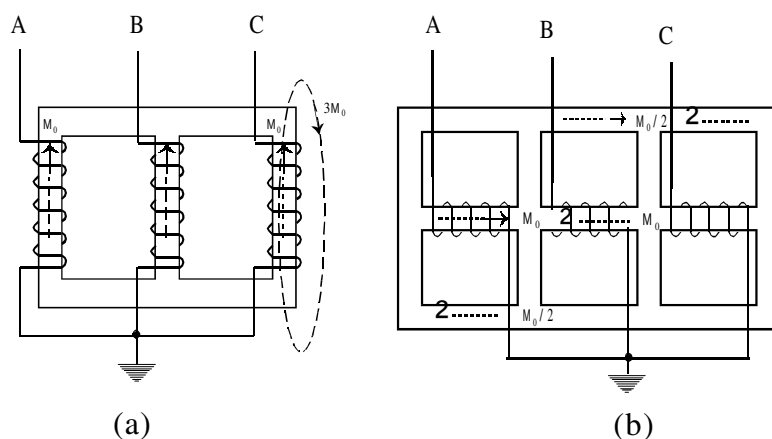


Figura D.11. Distribución de los flujos magnéticos de secuencia cero en transformadores trifásicos para los tipos de núcleo más utilizados: (a) tipo columna; (b) tipo acorazado

secuencia cero (rama paralelo del circuito equivalente) tan baja que no se debe ignorar si se requiere precisión en los cálculos. Algunas veces se simula el tanque como un terciario de alta impedancia conectado en Δ

La admitancia de excitación de secuencia cero del transformador acorazado usualmente se desprecia, aunque debe tenerse en cuenta bajo condiciones de saturación del núcleo (corrientes de secuencia cero muy elevadas). El problema discutido es más pronunciado en unidades pequeñas. Los transformadores de distribución trifásicos hasta de 500 kVA. y 79 kV son casi siempre tipo columna. La mayoría, pero no todos los transformadores de potencia grandes son acorazados. existen también transformadores tipo núcleo de cinco patas que tienen admitancia de excitación de secuencia cero de valor intermedio.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ANDERSON, Paul M., “*Analysis of Faulted Power Systems*”, Iowa State University Press, Iowa, 1973.
- [2] ANSI (American National Standards Institute) C57.12.70-1978, “*Terminal Markings and Connections for Distribution and Power Transformers*”, IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), 1978

- [3] MIT (Massachusetts Institute Of Technology), “*Circuitos Magnéticos y Transformadores*”, Editorial Marcombo, Barcelona, 1968.
- [4] GENERAL ELECTRIC, “*Transformer Connections*”, Schenectady, N. Y., 1960

Capítulo 5

ALGORITMO PARA CONSTRUIR LA MATRIZ IMPEDANCIA DE NODOS ADICIONANDO UN ELEMENTO CADA VEZ

5.1 OBJETIVO

Definir la matriz impedancia de nodos $[Z]$ de una red monofásica y, a partir de la interpretación circuital de cada uno de sus elementos, derivar un algoritmo para construirla adicionando un elemento vez.

5.2 NOTACIÓN

Las *letras minúsculas del alfabeto latino* $a, b, c, \dots, z$ se refieren a cantidades independientes de la conexión particular entre los elementos de la red o a *subíndices fijos*.

Las *letras mayúsculas del alfabeto latino* $A, B, C, \dots, Z$ expresan cantidades que dependen de la interconexión particular de los elementos, es decir, de la estructura topológica del circuito.

Las *letras minúsculas del alfabeto griego* $\alpha, \beta, \dots, \rho, \sigma, \dots, \varrho$ se usan para indicar *subíndices variables*.

Una letra con subíndices fijos (letras minúsculas del alfabeto latino), o sin ellos, encerrada entre corchetes, representa una matriz.

Una letra con subíndices variables (letras minúsculas del alfabeto griego) es siempre una matriz y no necesita corchetes.

5.3 NOMENCLATURA Y DEFINICIONES

Cada elemento de la red se identifica mediante los nodos entre los cuales está conectado.

Por razones de generalidad se parte una red parcial de m nodos cuya matriz $[Z]$ se supone conocida.

Cadena acoplada es un conjunto de líneas $a, b, c, \dots, n$ tal que a está acoplada con b , b con c y así sucesivamente hasta n . Se dice que una línea está *encadenada* a otra si se puede formar entre ellas una cadena acoplada.

Grupo acoplado de líneas es aquél en el cual cada elemento está directamente acoplado o, por lo menos encadenado, a todos los demás del conjunto.

m número de barras de la red parcial.

$p - t$ identifica el elemento que se adiciona (mediante los nodos entre los cuales se conecta). Se supone mutuamente acoplado o encadenado a los elementos de la red parcial $\rho_1 - \sigma_1, \rho_2 - \sigma_2, \rho_3 - \sigma_3, \dots$, etc., identificados mediante los nodos entre los cuales están conectados y designado como el conjunto $\rho\sigma$. Nótese que $\rho_i \leq m$ y $\sigma_i \leq m \forall i$

p nodo de la red parcial.

t nuevo nodo cuando el elemento que se adiciona es radial.

$z_{pt, pt} (y_{pt, pt})$ impedancia (admitancia) propia del elemento que se adiciona. Nótese que, en general, $y_{pt, pt} \neq \frac{1}{z_{pt, pt}}$

$z_{pt, \rho\sigma} (y_{pt, \rho\sigma})$ es el vector fila de impedancias (admitancias) mutuas entre el elemento $p - t$ y el conjunto de elementos de la red parcial. $\rho\sigma$

$z_{\rho\sigma, pt} (y_{\rho\sigma, pt})$ es el vector columna igual al transpuesto de $z_{pt, \rho\sigma} (y_{pt, \rho\sigma})$

$z_{\rho\sigma, \rho\sigma} (y_{\rho\sigma, \rho\sigma})$ matriz impedancia (admitancia) primitiva del conjunto de elementos $\rho\sigma$

$[z] ([y])$ matriz impedancia (admitancia) primitiva. Es decir, la de los elementos sin

considerar su interconexión, y están relacionadas entre sí mediante la ecuación

$$[z]^{-1} = \begin{bmatrix} z_{pt, pt} & z_{pt, \rho\sigma} \\ z_{\rho\sigma, pt} & z_{\rho\sigma, \rho\sigma} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y_{pt, pt} & y_{pt, \rho\sigma} \\ y_{\rho\sigma, pt} & y_{\rho\sigma, \rho\sigma} \end{bmatrix} = [y] \quad (5.1)$$

De las anteriores definiciones se puede concluir entonces que

$$\begin{bmatrix} v_{pt} \\ v_{\rho\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{pt, pt} & z_{pt, \rho\sigma} \\ z_{\rho\sigma, pt} & z_{\rho\sigma, \rho\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pt} \\ i_{\rho\sigma} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde v_{pt} (i_{pt}) es el voltaje (la corriente) en el elemento que se adiciona e $i_{\rho\sigma}$ ($v_{\rho\sigma}$) es el vector columna de corrientes (voltajes) en los elementos de la red parcial mutuamente acoplados a él

5.4 INTERPRETACIÓN CIRCUITAL DE LOS ELEMENTOS DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE NODOS

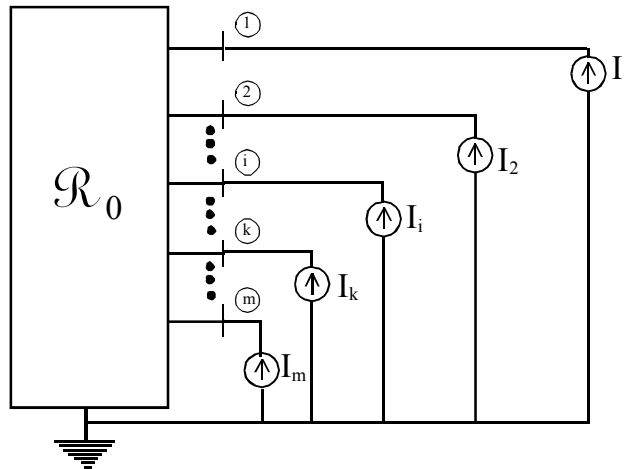


Figura 5.1. Definición e interpretación circuital de los elementos de la matriz impedancia de nodos

Considere la interconexión arbitraria de elementos de circuito lineales, bilaterales y

pasivos de la Figura 5.1, excitada por fuentes independientes de corriente conectadas entre la referencia y cada uno de sus nodos.

Sea $\vec{I}$ el vector de corrientes netas inyectadas entre el nodo de referencia y cada nodo y $\vec{V}$ el vector de voltajes de nodo, relacionados mediante la matriz impedancia de nodos $[Z]$ de acuerdo a la ecuación:

$$[Z] \vec{I} = \vec{V} \quad (5.3)$$

Denotando por V_i e I_k a los elementos generales de los vectores $\vec{V}$ e $\vec{I}$, respectivamente, $i, k = 1, 2, \dots, m$, y por Z_{ik} al elemento general de la matriz impedancia de nodos $[Z] = [Z_{ik}]$ la ecuación (5.2) puede escribirse en forma expandida de la siguiente manera:

$$V_i = \sum_{k=1}^m Z_{ik} I_k \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

Cuando todos los elementos de $\vec{I}$, son cero excepto el k -ésimo que vale uno, es decir

$$\vec{I} = \begin{cases} I_j = 0 \quad \forall j \neq k \\ I_k = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

$i_{pt}^k (v_{pt}^k)$ corriente (caída de potencial) a través del elemento $p - t$

$i_{\rho\sigma}^k (v_{pt}^k)$ vector de corrientes (caídas de potencial) a través de los elementos del conjunto $\rho\sigma$.

V_i^k voltaje entre el i -ésimo nodo y el de referencia.

Reemplazando (5.5) en (5.4) se obtiene la siguiente definición e interpretación para los elementos de la matriz impedancia de nodos

$$Z_{ik} = V_i^k \quad \forall i \quad (5.6)$$

Es decir, la k -ésima columna de la matriz impedancia de nodos $[Z]$ se obtiene in-

yectando entre en nodo de referencia y el k -ésimo una fuente independiente de corriente de valor unitario en tanto por uno y obteniendo todos los voltajes de nodo del circuito. Nótese que *el elemento diagonal de la matriz impedancia de nodos Z_{kk} es la impedancia de Thévenin vista entre el k -ésimo nodo y el de referencia.*

Nótese que la definición (5.6) es una consecuencia de (5.4) y de (5.5), pero que también se puede partir de (5.6) y aplicar el teorema de superposición y el principio de proporcionalidad para llegar a (5.4). Además una consecuencia de (5.6) es que **el primer elemento adicionado debe ser uno conectado al nodo de referencia** (un generador en sistemas eléctricos de potencia) y que **por lo menos uno de los nodos terminales de cada nuevo elemento que se adiciona debe pertenecer a la red parcial**. La Figura 5.2(a) muestra una interconexión de elementos pasivos R_0 excitada mediante una fuente independiente de corriente i_{qp} entre los nodos q y p , la cual se puede reemplazar por otras dos como se sugiere en la Figura 5.2(b). Si el valor de dicha fuente es de 1.0 en por unidad, entonces el voltaje V_{pq} es igual a la impedancia de Thévenin entre los dos nodos. Aplicando el teorema de superposición y la definición (5.6) se obtiene:

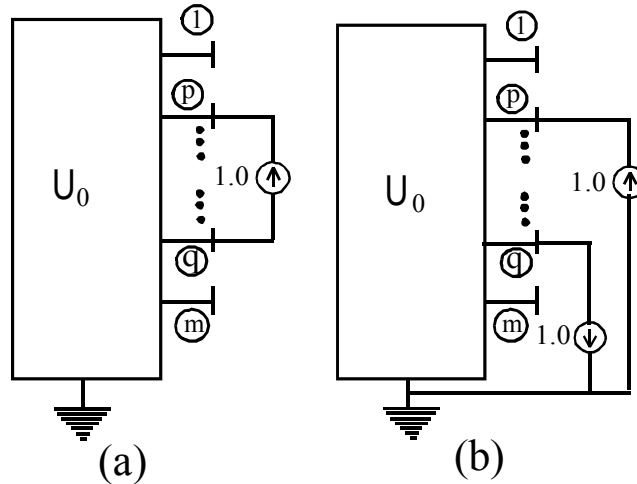


Figura 5.2. Equivalente de Thévenin entre dos nodos en función de algunos de los elementos de la matriz impedancia de nodos

$$\begin{aligned} Z_{th}^{pq} &= (V_p^p - V_q^p) - (V_p^q - V_q^q) \\ &= (Z_{pp} - Z_{qp}) - (Z_{pq} - Z_{qq}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.5 ADICIÓN DE UN ELEMENTO RADIAL

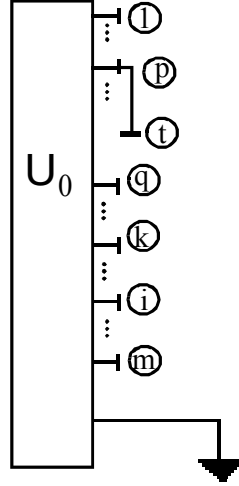


Figura 5.3. Representación de una red parcial al que se adiciona un elemento radial

La Figura 5.3 muestra una red parcial de m nodos en la que se ha adicionado un nuevo elemento entre el nodo p ($\leq m$) de la red parcial y uno nuevo t (casi siempre igual a $m+1$), mutuamente acoplado o encadenado a los elementos de la red parcial ρ_1 - σ_1 , ρ_2 - σ_2 , ρ_3 - σ_3 , $\dots$, etc., identificados mediante los nodos entre los cuales están conectados y designado como el conjunto $\rho\sigma$. Por razones de generalidad se supone conocida la matriz impedancia de nodos $[Z] = [Z_{ik}]$ de la red parcial, cuyo comportamiento se describe completamente mediante el conjunto de ecuaciones (5.4).

Cuando la corriente neta inyectada entre el nodo de referencia y el k -ésimo nodo ($k \neq t$) es de $1.0 \angle 0^\circ$ p.u. y en todos los demás es cero, es decir, la excitación del circuito es como lo establece la ecuación (5.5) entonces, en este caso $i_{pt}^{k \neq t} = 0$, y, por lo tanto no hay corriente en el elemento adicionado y éste no induce voltajes en ninguno de los elementos de la red parcial mutuamente acoplados a él (conjunto $\rho\sigma$). Lo anterior significa que $V_i^{k \neq t}$, $k \neq t$ es independiente de la presencia o ausencia del elemento adicionado. Se puede concluir entonces que para obtener matriz impedancia de nodos del circuito modificado $[Z'] = [Z'_{ik}]$ únicamente se requiere calcular los elementos de la columna (o de la fila) correspondiente a la nueva barra t . Es decir,

$$Z'_{ik} = Z_{ik} \forall i, k \neq t \quad (5.8)$$

Por lo tanto, el comportamiento del circuito de la Figura 5.3 se puede describir com-

pletamente mediante el siguiente conjunto linealmente independiente de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_i &= \sum_{k=1}^m Z_{ik} I_k + Z_{it} I_t \quad i = 1, 2, \dots, m \quad i \neq t \\ V_t &= \sum_{i=1}^m Z_{ti} I_i + Z_{tt} I_t \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde se mantiene la definición (5.6). Es decir $Z_{it} = Z_{ti} = V_t^i = V_i^t$

Cuando se inyecta una corriente unitaria únicamente en el k -ésimo nodo. Es decir, cuando el vector de corrientes $\vec{I}$ es el de la ecuación (5.5), aplicando la 2ª ley de K a la trayectoria cerrada formada por los nodos p , t , y el de referencia, e invirtiendo (5.2) se obtiene

$$V_t^{k \neq t} = V_p^{k \neq t} - v_{pt}^{k \neq t} \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} i_{pt}^{k \neq t} \\ i_{\rho\sigma}^{k \neq t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pt, pt} & y_{pt, \rho\sigma} \\ y_{\rho\sigma, pt} & y_{\rho\sigma, \rho\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{pt}^{k \neq t} \\ v_{\rho\sigma}^{k \neq t} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

De (5.11)

$$\begin{aligned} i_{pt}^{k \neq t} &= y_{pt, pt} v_{pt}^{k \neq t} + y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^{k \neq t} = 0 \\ v_{pt}^{k \neq t} &= - \frac{y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^{k \neq t}}{y_{pt, pt}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Reemplazando (5.12) en (5.10) se obtiene

$$V_t^{k \neq t} = V_p^{k \neq t} + \frac{y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^{k \neq t}}{y_{pt, pt}} \quad (5.13)$$

De (5.6) se obtiene:

$$v_{\rho\sigma}^k = \begin{bmatrix} v_{\rho_1\sigma_1}^k \\ v_{\rho_2\sigma_2}^k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\rho_1 k} \\ Z_{\rho_2 k} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{\sigma_1 k} \\ Z_{\sigma_2 k} \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{v}_{\rho}^k - \vec{v}_{\sigma}^k = Z_{\rho k} - Z_{\sigma k} \quad (5.14)$$

Reemplazando (5.14) y la definición (5.6) en (5.13) se obtiene:

$$Z_{tk} = Z_{pk} + \frac{y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho k} - Z_{\sigma k})}{y_{pt, pt}} \quad \forall k \neq t \quad (5.15)$$

Similarmente, cuando la corriente neta inyectada entre el nodo de referencia y el t -ésimo nodo es de 1.0 p.u. y en todos los demás es cero $i_{pt}^t = -1$ Aplicando la 2ª ley de K a la trayectoria cerrada formada por los nodos p , t , y el de referencia, e invirtiendo (5.2) se obtiene

$$V_t^t = V_p^t - v_{pt}^t \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} i_{pt}^t = -1 \\ i_{\rho\sigma}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pt, pt} & y_{pt, \rho\sigma} \\ y_{\rho\sigma, pt} & y_{\rho\sigma, \rho\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{pt}^t \\ v_{\rho\sigma}^t \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

De (5.17) se puede obtener

$$\begin{aligned} i_{pt}^t &= -1 = y_{pt, pt} v_{pt}^t + y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^t \\ v_{pt}^t &= -\frac{1 + y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^t}{y_{pt, pt}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.18) en (5.16) se obtiene

$$V_t^t = V_p^t + \frac{1 + y_{pt, \rho\sigma} v_{\rho\sigma}^t}{y_{pt, pt}} \quad (5.19)$$

Aplicando (5.14) con $k = t$ y la definición (5.6) a (5.19) se obtiene:

$$Z_{tt} = Z_{pt} + \frac{1 + y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho t} - Z_{\sigma t})}{y_{pt, pt}} \quad (5.20)$$

5.5.1 EJEMPLO 1

La matriz impedancia de nodos de un circuito es:

$$[Z] = j \begin{bmatrix} 0.03452 & 4.766 \times 10^{-4} & 0.02090 \\ 4.766 \times 10^{-4} & 0.03452 & 0.01410 \\ 0.02090 & 0.01410 & 0.6182 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Entre el nodo ($p = 1$) y uno nuevo $t (= 4)$ se conecta un elemento mutuamente acoplado a otros de la red parcial de acuerdo a las siguientes impedancias propias y mutuas:

$$[z] = j \begin{matrix} & \begin{matrix} 1-4 & 1-3 & 3-2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.5 & 0.6 & 0.9 \\ 0.6 & 1.0 & 0.0 \\ 0.9 & 0.0 & 1.5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1-4 \\ 1-3 \\ 3-2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.22)$$

Obtener la matriz impedancia de nodos de la red modificada

De (5.22) puede verse que

$$\begin{matrix} p = 1 & t = 4 & \rho_1 = 1 & \sigma_1 = 3 \\ & & \rho_2 = 3 & \sigma_2 = 2 \end{matrix} \quad (5.23)$$

Además

$$\begin{aligned}
[z]^{-1} &= [y] = -j \begin{matrix} & \begin{matrix} 1-4 & 1-3 & 3-2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.625 & -0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 1.225 & 0.225 \\ -0.375 & 0.225 & 0.892 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1-4 \\ 1-3 \\ 3-2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.24) \\
&= \begin{bmatrix} y_{14,14} & y_{14,13} & y_{14,32} \\ y_{13,14} & y_{13,13} & y_{13,32} \\ y_{32,14} & y_{32,13} & y_{32,32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Reemplazando (5.24) en (5.15) se obtiene:

$$Z_{4k} = Z_{1k} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14,1-3} & y_{14,32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{1k} \\ Z_{3k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{3k} \\ Z_{2k} \end{bmatrix} \right)}{y_{14,14}} \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

Reemplazando (5.21) y (5.24) en (5.25) para $k = 1, 2$ y 3 , respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
Z_{41} &= Z_{11} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14,1-3} & y_{14,32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{31} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{31} \\ Z_{21} \end{bmatrix} \right)}{y_{14,14}} \\
&= j 0.3452 + \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} j \left(\begin{bmatrix} 0.03452 \\ 0.02090 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02090 \\ 4.766 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 0.01409 = Z_{14} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{42} &= Z_{12} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14,1-3} & y_{14,32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{32} \\ Z_{22} \end{bmatrix} \right)}{y_{14,14}} \\
&= j 4.766 \times 10^{-4} + \\
&\quad \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} j \left(\begin{bmatrix} 4.766 \times 10^{-4} \\ 0.01410 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.01410 \\ 0.03452 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 0.02090 = Z_{24} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{43} &= Z_{13} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14, 1-3} & y_{14, 32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{33} \\ Z_{23} \end{bmatrix} \right)}{y_{14, 14}} \\
&= j 0.02090 + \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} j \left(\begin{bmatrix} 0.02090 \\ 0.6182 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6182 \\ 0.01410 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 0.01682 = Z_{34}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Reemplazando (5.23) en (5.20) se obtiene

$$Z_{44} = Z_{14} + \frac{1 + \begin{bmatrix} y_{14, 1-3} & y_{14, 32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{14} \\ Z_{34} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{34} \\ Z_{24} \end{bmatrix} \right)}{y_{14, 14}} \tag{5.29}$$

Reemplazando (5.24), (5.26), (5.27) y (5.28) en (5.29) se obtiene

$$\begin{aligned}
Z_{44} &= j 0.01409 + \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \left(j \begin{bmatrix} 0.01409 \\ 0.01682 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0.01682 \\ 0.02090 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 1.61818
\end{aligned} \tag{5.30}$$

5.6 ADICIÓN DE UN ENLACE

La Figura 5.4(a) muestra una red de elementos pasivos R_0 a la que se ha adicionado el elemento radial $p - t$, excitada mediante una fuente independiente de corriente de valor unitario entre el nodo de referencia y el k -ésimo nodo ($k \neq t$). Si en vez de un valor unitario fuera I_k , la respuesta (el voltaje medido entre i -ésimo nodo y el de referencia, $i \neq t$) sería $Z_{ik} I_k$. Y si en todos los nodos hubiera simultáneamente corrientes inyectadas I_k ($k = 1, 2, \dots, p, \dots, q, \dots, m$ $k \neq t$) entonces

$$V_i = \sum_{k=1}^m Z_{ik} I_k$$

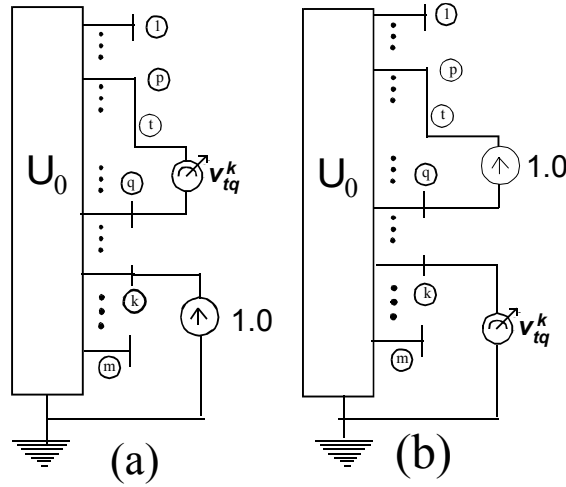


Figura 5.4. Una consecuencia del teorema de reciprocidad es que la lectura de los voltímetros es idéntica en ambos casos y la matriz impedancia de nodos es simétrica

En la Figura 5.4(a) el equivalente de Thévenin entre los nodos t y q , consta de una fuente de voltaje $e_{th} = v_{tq}$ $k \neq t$ igual al que registra un voltímetro conectado entre ellos¹⁸ y por una impedancia que se obtiene aplicando la ecuación (5.7). Nótese que $v_{tq}^{k \neq t}$ es igual a **la fuente de voltaje que se debe conectar en serie con el elemento $p - t$ para que a través de él no circule corriente.**

El teorema de reciprocidad establece que la relación entre la transformada de Laplace de la respuesta $v_{tq}^{k \neq t}$ y la de la excitación I_k permanece invariante cuando se intercambian de ubicación siempre y cuando no se altere la estructura topológica del circuito¹⁹. Puede concluirse que una corriente unitaria aplicada entre los nodos q y t da origen a un voltaje en el k -ésimo nodo ($k \neq t$) igual al que se produce entre los nodos t y q , v_{tq}^k , cuando se inyecta una corriente entre el nodo de referencia y el k -ésimo, como lo sugiere el intercambio ubicación entre la fuente de corriente con la del voltímetro ilustrado en la Figura 5.4. Similarmente, si en vez un valor unitario la fuente de corriente entre los nodos q y t fuera I_S el voltaje en el i -ésimo nodo ($i \neq t$) sería $v_{tq}^{i \neq t} I_S$. Es decir, aplicando el teorema de superposición se obtiene:

¹⁸ Recuérdese que idealmente la impedancia interna del voltímetro conectado entre los nodos p y t en la Figura 5.4 es infinita y, puesto que, además, queda en serie con el elemento $p - t$, a través de éste no circula corriente

¹⁹ para evaluar lo cual se debe considerar la fuente independiente de voltaje como un corto circuito generalizado (un caso particular si su valor es nulo) y la de corriente como un circuito abierto generalizado (un caso particular que ocurre cuando vale cero)

$$V_i = \sum_{k=1}^m Z_{ik} I_k + Z_{il} I_S \quad \forall i \neq t \quad Z_{il} = \overbrace{V_i^{I_S=1}}^{V_i^{I_S=1} = v_{tq}^{i \neq t}} \quad (5.31)$$

TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Similarmente, el voltaje resultante entre los nodos t y q cuando actúan simultáneamente fuentes de corriente entre la referencia y cada nodo I_i ($\forall i \neq t$) e I_S entre los nodos q y t sería

$$v_{tq} = \sum_{i=1}^m Z_{li} I_i + Z_{ll} I_S \quad (5.32)$$

$$Z_{li} = V_i^{I_S=1} = v_{tq}^{i \neq t} = Z_{il} \quad Z_{ll} = v_{tq}^{I_S=1}$$

Aplicando la segunda ley de K. a la trayectoria cerrada formada por los nodos t , q y el de referencia, cuando se inyecta una corriente unitaria entre la referencia y el i -ésimo nodo, se obtiene

$$v_{tq}^{i \neq t} = V_t^{i \neq t} - V_q^{i \neq t} = Z_{ti} - Z_{qi} = Z_{il} = Z_{li} \quad (5.33)$$

Reemplazando (5.15) (para $k = i \neq t$) en (5.33) se obtiene:

$$Z_{il} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho i} - Z_{\sigma i})}{y_{pt, pt}} \quad \forall i \neq t \quad (5.34)$$

De la definición en (5.32) puede notarse que Z_{ll} es igual a la impedancia de Thévenin vista entre los nodos t y q , es decir, aplicando (5.7)

$$\begin{aligned} Z_{ll} &= v_{tq}^t - v_{tq}^q = (V_t^t - V_q^t) - (V_t^q - V_q^q) \\ &= (Z_{tt} - Z_{qt}) - (Z_{tq} - Z_{qq}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Reemplazando (5.20) y (5.15) en (5.35) se obtiene

$$\begin{aligned}
Z_{ll} = & Z_{pt} + \frac{1 + y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho t} - Z_{\sigma t})}{y_{pt, pt}} - \left[Z_{pq} + \frac{y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho q} - Z_{\sigma q})}{y_{pt, pt}} \right] + \\
& - \left[Z_{qp} + \frac{y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho q} - Z_{\sigma q})}{y_{pt, pt}} \right] + Z_{qq}
\end{aligned} \quad (5.36)$$

Aplicando la definición sugerida en (5.33)

$$Z_{pl} = Z_{pt} - Z_{pq} \quad Z_{ql} = Z_{\rho t} - Z_{\rho q} \quad Z_{\sigma l} = Z_{\sigma t} - Z_{\sigma q} \quad (5.37)$$

Reemplazando (5.37) en (5.36) se obtiene:

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1 + y_{pt, \rho\sigma} (Z_{\rho l} - Z_{\sigma l})}{y_{pt, pt}} \quad (5.38)$$

Hacer $v_{tq} = 0$ en (5.32) y despejar I_S es equivalente a aplicar fuentes de corriente entre la referencia y cada uno de los nodos excepto en el t -ésimo, obtener el voltaje de Thévenin resultante entre los nodos t y q ($\sum_{i=1}^m Z_{li} I_i$) y dividirlo por la impedancia de Thévenin Z_{ll} vista entre estos nodos y cambiarla de signo. Por lo tanto, I_S es la corriente que circularía por un corto circuito entre los nodos t y q cambiada de signo

$$I_S = - \frac{\sum_{i=1}^m Z_{li} I_i}{Z_{ll}} \quad (5.39)$$

Reemplazando (5.39) en (5.31) se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_i &= \sum_{k=1}^m Z_{ik} I_k - Z_{il} \frac{\sum_{k=1}^m Z_{lk} I_k}{Z_{ll}} \quad \forall i \neq t \\
V_i &= \sum_{k=1}^m \left(Z_{ik} - \frac{Z_{il} Z_{lk}}{Z_{ll}} \right) I_k
\end{aligned} \quad (5.40)$$

Es decir, cuando se realiza el corto circuito entre los nodos t y q el elemento queda adi-

cionado como enlace entre los nodos p y q y el elemento general de la matriz impedancia de nodos modificada es

$$Z'_{ik} = Z_{ik} - \frac{Z_{il} Z_{lk}}{Z_{ll}} \quad i, k = 1, 2, \dots, m \quad (5.41)$$

5.6.1 EJEMPLO 2

La matriz impedancia de nodos es

$$[Z] = j \begin{bmatrix} 0.03452 & 4.7665 \times 10^{-4} & 0.01410 \\ 4.7665 \times 10^{-4} & 0.03452 & 0.02090 \\ 0.01410 & 0.02090 & 0.618818 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Entre los nodos p y q se conecta un elemento mutuamente acoplado a otros de la red parcial de acuerdo a las siguientes impedancias propias y mutuas:

$$[z] = j \begin{matrix} & \begin{matrix} 1-2 & 1-3 & 3-2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.9 & 1.5 & 0.0 \\ 0.6 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1-2 \\ 1-3 \\ 3-2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.43)$$

Obtener la matriz impedancia de barras modificada $[Z'] = [Z'_{ik}]$

De (43) puede verse que

$$\begin{matrix} p = 1 & \rho_1 = 1 & \sigma_1 = 3 \\ q = 2 & t = 4 & \rho_2 = 3 & \sigma_2 = 2 \end{matrix} \quad (5.44)$$

Además invirtiendo (5.43)

$$\begin{aligned}
[z]^{-1} &= [y] = -j \begin{matrix} & \begin{matrix} 1-4 & 1-3 & 3-2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.625 & -0.375 & -0.375 \\ -0.375 & 0.89167 & 0.225 \\ -0.375 & 0.225 & 1.225 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1-4 \\ 1-3 \\ 3-2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.45) \\
&= \begin{bmatrix} y_{14,14} & y_{14,13} & y_{14,32} \\ y_{13,14} & y_{13,13} & y_{13,32} \\ y_{32,14} & y_{32,13} & y_{32,32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Reemplazando (5.44) en (5.34) se obtiene:

$$Z_{il} = Z_{1i} - Z_{2i} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14,1-3} & y_{14,32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{1i} \\ Z_{3i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{3i} \\ Z_{2i} \end{bmatrix} \right)}{y_{14,14}} \quad (5.46)$$

$i = 1, 2, 3$

Reemplazando (5.42) y (5.45) en (5.46) para $i = 1, 2, 3$, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
Z_{1l} &= Z_{11} - Z_{21} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14,1-3} & y_{14,32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{31} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{31} \\ Z_{21} \end{bmatrix} \right)}{y_{14,14}} \\
&= j 0.03452 - j 4.7665 \times 10^{-4} + \\
&\quad \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \left(j \begin{bmatrix} 0.03452 \\ 0.0141 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0.0141 \\ 4.7665 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 0.01362 = Z_{l1} \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{2l} &= Z_{12} - Z_{22} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14, 1-3} & y_{14, 32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{32} \\ Z_{22} \end{bmatrix} \right)}{y_{14, 14}} \\
&= j 4.7665 \times 10^{-4} - j 0.02090 + \\
&\quad \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \left(j \begin{bmatrix} 4.7665 \times 10^{-4} \\ 0.02090 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0.02090 \\ 0.03452 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= -j 0.01362 = Z_{l2}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
Z_{3l} &= Z_{13} - Z_{23} + \frac{\begin{bmatrix} y_{14, 1-3} & y_{14, 32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{13} \\ Z_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{33} \\ Z_{23} \end{bmatrix} \right)}{y_{14, 14}} \\
&= j 0.0141 - j 0.02090 + \\
&\quad \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \left(j \begin{bmatrix} 0.01410 \\ 0.61818 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 0.61818 \\ 0.02090 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= -j 2.72 \times 10^{-3} = Z_{l3}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Reemplazando (5.44) y (5.45) en (5.38) se obtiene:

$$Z_{ll} = Z_{1l} - Z_{2l} + \frac{1 + \begin{bmatrix} y_{14, 1-3} & y_{14, 32} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Z_{1l} \\ Z_{3l} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{3l} \\ Z_{2l} \end{bmatrix} \right)}{y_{14, 14}} \tag{5.50}$$

Reemplazando (5.45), (5.47), (5.48) y (5.49) en (5.50) se obtiene:

$$\begin{aligned}
Z_{ll} &= j 0.01362 - (-0.01362) + \\
&\quad \frac{(-j) \begin{bmatrix} -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \left(j \begin{bmatrix} 0.01362 \\ -2.72 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -2.72 \times 10^{-3} \\ 0.01362 \end{bmatrix} \right)}{(-j) 0.625} \\
&= j 1.6109
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Reemplazando (5.42), (5.47), (5.48), (5.49) y (5.51) en (5.40) se obtiene:

$$[Z] = j \begin{bmatrix} 0.03440 & 5.918 \times 10^{-4} & 0.01412 \\ 5.918 \times 10^{-4} & 0.03440 & 0.02086 \\ 0.01412 & 0.02086 & 0.61818 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] EL-ABIAD, Ahmed. and GLENN W. Stagg, “**Computer Methods in Power System Analysis**”, McGraw-Hill, 1ª edición, New York, 1973.
- [2] CHANG, Shu Park y otros, “Analysis of Linear Networks and Systems”, Abbison Wesley, 1972.

Capítulo 6

ALGORITMO PARA MODIFICAR LA MATRIZ IMPEDANCIA DE NODOS CUANDO SE DESCONECTA DE LA RED UNA LÍNEA MUTUAMENTE ACOPLADA

6.1 OBJETIVO

Se deriva y justifica un algoritmo para modificar la matriz impedancia de nodos de un circuito arbitrario cuando se desconecta uno de sus elementos mutuamente acoplados de uno de sus nodos terminales. El enfoque propuesto no requiere inversión de matrices (como el descrito en la referencia [1]), lo que permite reducir el tiempo de ejecución. Además, mediante su aplicación se pueden analizar simultáneamente *fallos de línea abierta y de extremo de línea* que son, respectivamente, los que ocurren:

- 1 En una barra una vez que ha operado la protección de uno de los elementos conectados a él [*fallo de línea abierta*: ver Figura 6.1(b)];
- 2 Inmediatamente después del interruptor que protege la línea de transporte y éste ya ha actuado para desconectar la barra [*fallo de extremo de línea*: ver Figura 6.1(c)];

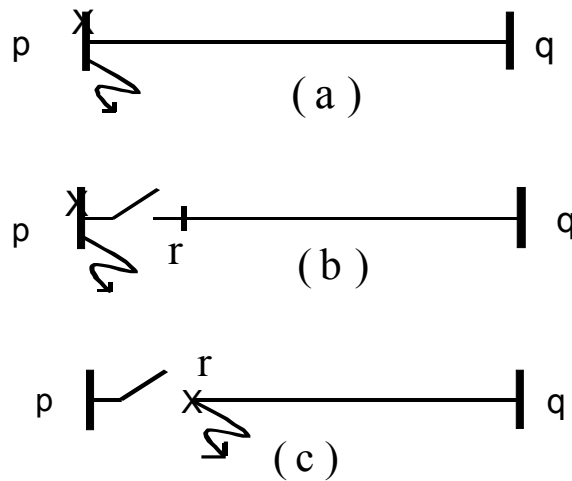


Figura 6.1. Diagrama unifilar de un fallo simple (a), de un fallo de línea abierta (b) y de uno de extremo de línea (c)

6.2 INTRODUCCIÓN

El método descrito en el capítulo anterior para construir la matriz impedancia de nodos $[Z]$ se puede usar para reflejar otros cambios en la red (distintos a la adición de un elemento) tales como desconexión de un elemento $p - q$ sin acoplamiento mutuo (o cambio en su impedancia propia), para lo cual basta introducir un enlace en paralelo con ella cuya impedancia propia sea igual y negativa (o de valor tal que la impedancia equivalente sea el valor deseado).

Para modificar $[Z]$ cuando se dispara el interruptor que conecta una línea acoplada a cualquiera de sus barras terminales la referencia [1] propone un algoritmo de 2 pasos, a saber:

- 1 Desconexión de la línea lo que requiere de un procedimiento complicado y laborioso (al menos dos inversiones y dos multiplicaciones de matrices);
- 2 Reconexión de la misma como elemento radial;

En este trabajo se resuelve el mismo problema en un solo paso mediante el algoritmo sugerido en [2], el cual es mucho más eficiente en cuanto al número de operaciones

(tiempo de ejecución) y a requerimientos de capacidad de almacenamiento del computador.

6.3 DEFINICIONES Y NOMENCLATURA

Cadena acoplada es un conjunto de líneas $a, b, c, \dots, n$ tales que a está acoplada con b , b con c y así sucesivamente hasta n . Se dice que una línea está encadenada a otra si se puede formar entre ellas una cadena acoplada.

Grupo acoplado de líneas es aquél en el que cada una está acoplada o por lo menos encadenada a todas las demás del conjunto. Se designan mediante letras del alfabeto griego.

Cada elemento de la red se identifica mediante los nodos entre los cuales está conectado.

$M + 1$ Número de elementos del grupo acoplado α

$p - q$ elemento que se desconecta (el primero del grupo acoplado α). Se supone mutuamente acoplado o encadenado a los elementos $\rho_1 - \sigma_1, \rho_2 - \sigma_2, \rho_3 - \sigma_3, \dots, \rho_M - \sigma_M$ designado como el conjunto α .

$[y]$ Matriz admitancia primitiva del grupo acoplado α

$\vec{y}_1$ 1ª columna de $[y]$ correspondiente al elemento $p - q$

$y_{pq, pq}$ admitancia propia del elemento que se desconecta

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{pq, pq} \\ y_{\rho_1 \sigma_1, pq} \\ y_{\rho_2 \sigma_2, pq} \\ \vdots \\ y_{\rho_M \sigma_M, pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pq, pq} \\ \vec{y}_{\rho \sigma, pq} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Cuando la corriente neta inyectada entre el nodo de referencia y el k -ésimo vale $1.0 \angle 0^\circ$ y en todos los demás es cero:

$V_j^k = Z_{jk}$ Voltaje en el nodo j

$i_{pq}^k (v_{pq}^k)$ es la corriente que fluye (caída de potencial) a través del elemento $p - q$

$Z_{\alpha, k}$ Vector de voltajes en **todos** los elementos del grupo acoplado

$$Z_{\alpha, k} = \begin{bmatrix} V_p^k - V_q^k \\ V_{\rho_1}^k - V_{\sigma_1}^k \\ V_{\rho_2}^k - V_{\sigma_2}^k \\ \vdots \\ V_{\rho_M}^k - V_{\sigma_M}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{pk} - Z_{qk} \\ Z_{\rho_1 k} - Z_{\sigma_1 k} \\ Z_{\rho_2 k} - Z_{\sigma_2 k} \\ \vdots \\ Z_{\rho_M k} - Z_{\sigma_M k} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

C_k Corriente a través del elemento $p - q$ cuando se inyecta una corriente unitaria únicamente en el k -ésimo nodo

$$i_{pq}^k = C_k = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, k} \quad (6.3)$$

$$\vec{C}_\alpha = \begin{bmatrix} C_p - C_q \\ C_{\rho_1} - C_{\sigma_1} \\ C_{\rho_2} - C_{\sigma_2} \\ \vdots \\ C_{\rho_M} - C_{\sigma_M} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$P = \vec{y}_1^T \vec{C}_\alpha - y_{pq, pq} \quad (6.5)$$

6.4 ALGORITMO DE MODIFICACIÓN

- 1 Invertir la matriz de impedancias propias y mutuas del grupo acoplado α e identificar los términos de la ecuación (6.1)
- 2 Obtener $Z_{\alpha, k} \forall k$ aplicando (6.2)
- 3 Calcular $C_{k\alpha, k} \forall k$ aplicando (6.3)
- 4 Aplicando (6.4) y (6.5) obtener P

- 5 Calcular los elementos de la matriz impedancia de nodos modificada $[Z']$ aplicando la siguiente ecuación:

$$Z'_{ij} = Z_{ij} - \frac{C_i C_j}{P} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (6.6)$$

donde N es el número total de nodos

- 6 Cuando el elemento $p - q$ se desconecta de uno de sus nodos se crea uno nuevo, el cual se identifica mediante la letra r .

a *Desconexión del nodo q*

$$Z'_{ir} = Z_{iq} - \frac{C_i (C_q + 1)}{P} \quad (6.7)$$

$$Z_{rr} = Z_{qq} - \frac{(C_q + 1)^2}{P} \quad (6.8)$$

b *Desconexión del nodo p*

$$Z'_{ir} = Z_{ip} - \frac{C_i (C_p - 1)}{P} \quad (6.9)$$

$$Z'_{rr} = Z_{pp} - \frac{(C_p - 1)^2}{P} \quad (6.10)$$

6.4.1 EJEMPLO

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0.8851 & 0.1658 & 0.2750 & 0.2258 \\ 0.1658 & 0.3780 & 0.2918 & 0.1611 \\ 0.2750 & 0.2918 & 0.8453 & 0.2788 \\ 0.2258 & 0.1611 & 0.2788 & 0.5650 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$[Z]$ es la matriz impedancia de nodos de un circuito que incluye un grupo acoplado cuyas impedancias propias y mutuas son

$$[z] = j \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1-2 & 1-3 & 3-4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2.5 & 0.6 & 0.0 \\ 0.6 & 2.0 & -0.9 \\ 0.0 & -0.9 & 1.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1-2 \\ 1-3 \\ 3-4 \end{array} \quad (6.12)$$

Si el elemento (1 – 2) se desconecta de su nodo 2 hallar la matriz impedancia de nodos modificada $[Z']$

Nótese que

$$M + 1 = 3 \quad \begin{array}{ccc} p = 1 & \rho_1 = 1 & \sigma_1 = 1 \\ q = 2 & \rho_2 = 3 & \sigma_2 = 4 \end{array} \quad (6.13)$$

La columna correspondiente al elemento que se desconecta se debe ubicar como la primera en $[z]$ de cuya inversa se puede obtener:

$$[z]^{-1} = [y] = -j \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1-2 & 1-3 & 3-4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4438 & -0.1824 & -0.1094 \\ -0.1824 & 0.7599 & 0.4559 \\ -0.1094 & 0.4559 & 0.9402 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1-2 \\ 1-3 \\ 3-4 \end{array} \quad (6.14)$$

De (6.14) se puede identificar:

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{pq, pq} \\ y_{\rho_1 \sigma_1, pq} \\ y_{\rho_2 \sigma_2, pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12, 12} \\ y_{13, 12} \\ y_{34, 12} \end{bmatrix} = (-j) \begin{bmatrix} 0.4438 \\ -0.1824 \\ -0.1094 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Reemplazando (6.11) y (6.13) en (6.2) para $k = 1, 2, 3$ y 4, se obtiene:

$$Z_{\alpha, 1} = \begin{bmatrix} Z_{11} - Z_{21} \\ Z_{11} - Z_{31} \\ Z_{31} - Z_{41} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0.7193 \\ 0.6101 \\ 0.0492 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$Z_{\alpha,2} = \begin{bmatrix} Z_{12} - Z_{22} \\ Z_{12} - Z_{32} \\ Z_{32} - Z_{42} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -0.2122 \\ -0.1260 \\ 0.1308 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$Z_{\alpha,3} = \begin{bmatrix} Z_{13} - Z_{23} \\ Z_{13} - Z_{33} \\ Z_{33} - Z_{43} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -0.0169 \\ -0.5704 \\ 0.5665 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$Z_{\alpha,4} = \begin{bmatrix} Z_{14} - Z_{24} \\ Z_{14} - Z_{34} \\ Z_{34} - Z_{44} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0.0647 \\ -0.0530 \\ -0.2862 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Reemplazando (6.15) y (6.16), (6.17), (6.18) y (6.19), respectivamente, en (6.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= \vec{y}_1^T Z_{\alpha,1} = 0.2025 & C_2 &= \vec{y}_1^T Z_{\alpha,2} = -0.0855 \\ C_3 &= \vec{y}_1^T Z_{\alpha,3} = 0.0345 & C_4 &= \vec{y}_1^T Z_{\alpha,4} = 0.0697 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Reemplazando (6.20) en (6.4) se obtiene:

$$\vec{C}_\alpha = \begin{bmatrix} C_p - C_q \\ C_{\rho_1} - C_{\sigma_1} \\ C_{\rho_2} - C_{\sigma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_1 - C_3 \\ C_3 - C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2880 \\ 0.1680 \\ -0.0352 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Reemplazando (6.21) y (6.15) en (6.5) se obtiene:

$$P = \vec{y}_1^T \vec{C}_\alpha - y_{pq, pq} = j 0.3427$$

Reemplazando (6.11), (6.20) y (6.21) en (6.6) con $i, j = 1, 2, 3$ y 4, se obtiene

$$\begin{aligned}
Z'_{11} &= Z_{11} - \frac{C_1 C_1}{P} = j 1.0048 & Z'_{12} &= Z_{12} - \frac{C_1 C_2}{P} = j 0.1153 = Z'_{21} \\
Z'_{13} &= Z_{13} - \frac{C_1 C_3}{P} = j 0.2954 = Z'_{31} & Z'_{14} &= Z_{14} - \frac{C_1 C_4}{P} = j 0.2670 = Z'_{41} \\
Z'_{22} &= Z_{22} - \frac{C_2 C_2}{P} = j 0.3993 & Z'_{23} &= Z_{23} - \frac{C_2 C_3}{P} = j 0.2832 = Z'_{32} \\
Z'_{24} &= Z_{24} - \frac{C_2 C_4}{P} = j 0.1437 = Z'_{42} & Z'_{33} &= Z_{33} - \frac{C_3 C_3}{P} = j 0.8488 \quad (6.22) \\
Z'_{34} &= Z_{34} - \frac{C_3 C_4}{P} = j 0.2858 = Z'_{43} & Z'_{44} &= Z_{44} - \frac{C_4 C_4}{P} = j 0.5792
\end{aligned}$$

Reemplazando (6.11), (6.20) y (6.22) en (6.7) y en (6.8) con $r = 5$ e $i = 1, 2, 3, 4$ se obtiene, respectivamente

$$\begin{aligned}
Z'_{15} &= Z_{12} - \frac{C_1 (C_2 + 1)}{P} = j 0.7063 = Z'_{51} \\
Z'_{25} &= Z_{22} - \frac{C_2 (C_2 + 1)}{P} = j 0.1499 = Z'_{52} \\
Z'_{35} &= Z_{32} - \frac{C_3 (C_2 + 1)}{P} = j 0.3840 = Z'_{53} \\
Z'_{45} &= Z_{42} - \frac{C_4 (C_2 + 1)}{P} = j 0.3470 = Z'_{54}
\end{aligned} \quad (6.23)$$

$$Z'_{55} = Z_{22} - \frac{(C_2 + 1)^2}{P} = j 2.8181 \quad (6.24)$$

Las ecuaciones (6.22), (6.23) y (6.24) se pueden agrupar en un arreglo único para formar

$$[Z'] = j \begin{bmatrix} 1.0048 & 0.1153 & 0.2954 & 0.2670 & 0.7063 \\ 0.1153 & 0.3993 & 0.2832 & 0.1437 & 0.1499 \\ 0.2954 & 0.2832 & 0.8488 & 0.2858 & 0.3840 \\ 0.2670 & 0.1437 & 0.2858 & 0.5792 & 0.3470 \\ 0.7063 & 0.1499 & 0.3840 & 0.3470 & 2.8181 \end{bmatrix}$$

6.5 DERIVACIÓN

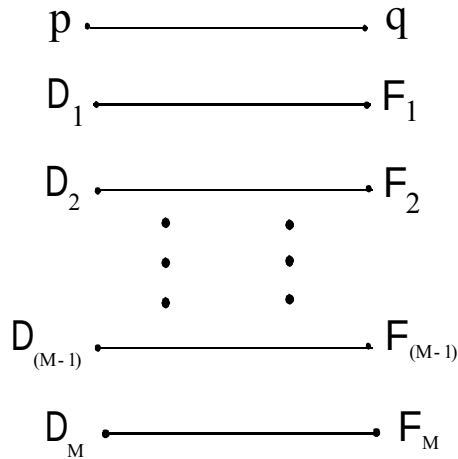


Figura 6.2. Grupo acoplado α que consta de $M + 1$ elementos

La Figura 6.2 muestra un grupo acoplado α en el que hay $M + 1$ elementos inductivos mutuamente acoplados. Para simular la desconexión del elemento $p - q$ del nodo q

- 1 Se introducen 2 nodos ficticios r y s y líneas sin acoplamiento de impedancias propias x y $-x$ entre las barras $r-s$ y $s-q$, respectivamente, como se ilustra en la Figura 6.3
- 2 Se adiciona un enlace sin acoplamiento mutuo de auto impedancia $-x$ entre los nodos r y s .

El conjunto de ecuaciones que describe completamente el comportamiento de la red inicial en la que está incluido el grupo acoplado α es

$$V_j = \sum_{k=1}^m Z_{jk} I_k \quad j = 1, 2, \dots, m$$

y el que lo describe una vez se han introducido los dos nodos ficticios r y s es

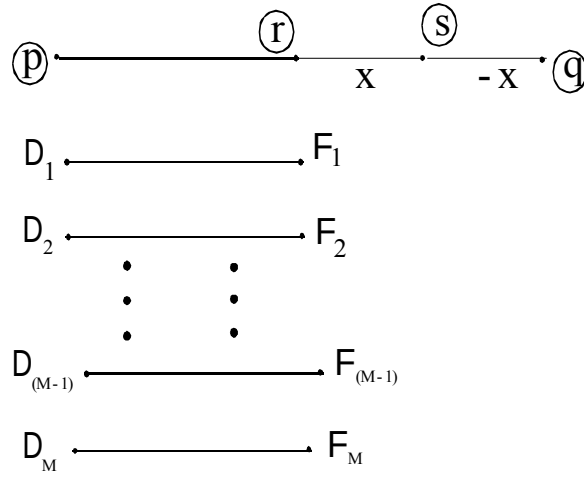


Figura 6.3. Grupo acoplado equivalente al de la Figura 6.2

$$\begin{aligned}
 V_j &= \sum_{k=1}^m Z_{jk} I_k + Z_{jr} I_r + Z_{js} I_s \\
 V_r &= \sum_{j=1}^m Z_{rj} I_j + Z_{rr} I_r + Z_{rs} I_s \\
 V_s &= \sum_{k=1}^m Z_{sk} I_k + Z_{sr} I_r + Z_{ss} I_s
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Nótese que antes de adicionar el enlace sin acoplamiento mutuo de auto impedancia $-x$ entre los nodos r y s

$$V_q^j = V_r^j \quad \forall j \neq s$$

Por lo tanto

$$Z_{jr} = Z_{jq} \quad \forall j \neq s \tag{6.26}$$

De (6.26) se sigue que

$$Z_{rr} = Z_{qq} \quad (6.27)$$

Similarmente aplicando la segunda ley de K. a la trayectoria formada entre los nodos r, s y el de referencia

$$V_s^j = V_r^j - i_{pq}^j x \quad \forall j \neq r, s \quad (6.28)$$

Reemplazando (6.3) en (6.28) se obtiene

$$Z_{js} = Z_{jr} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, j} x \quad \forall j \neq r, s \quad (6.29)$$

Cuando se inyecta corriente unitaria en r y aplicando la segunda ley de K. a la trayectoria formada entre los nodos r, s y el de referencia

$$V_s^r = V_r^r - (1 + \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q}) x \quad (6.30)$$

Reemplazando (6.3) en (6.30) se obtiene

$$Z_{rs} = Z_{qq} - (1 + \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q}) x \quad (6.31)$$

Si se inyecta corriente unitaria en s

$$i_{pr}^s = y_{pr, pr} (Z_{ps} - Z_{rs}) + y_{pr, \rho\sigma} (\vec{Z}_{\rho s} - \vec{Z}_{\sigma s}) \quad (6.32)$$

Sumando y restando, respectivamente, en el segundo miembro de (6.32)

$$y_{pr, pr} (Z_{ps} - Z_{qs}) = y_{pq, pq} (Z_{ps} - Z_{qs}) \quad (6.33)$$

se obtiene

$$i_{pr}^s = y_{pr, pr} (Z_{qs} - Z_{rs}) + \bar{y}_1^T Z_{\alpha, s} \quad (6.34)$$

Por lo tanto aplicando la segunda ley de K. a la trayectoria formada entre los nodos r , s y el de referencia se obtiene

$$V_s^s = V_r^s - i_{pr}^s x \quad (6.35)$$

Reemplazando (6.3) y (6.34) en (6.35) se obtiene

$$Z_{ss} = Z_{rs} - [y_{pq, pq} (Z_{qs} - Z_{rs}) + \bar{y}_1^T Z_{\alpha, s}] x \quad (6.36)$$

Adicionar un enlace sin acoplamiento mutuo de impedancia propia – x entre los nodos r y s es equivalente a desconectar la línea de la barra q

Los elementos de la matriz impedancia de nodos modificada $[Z']$ se obtienen aplicando las siguientes ecuaciones (ver capítulo anterior numeral 5.6 *adición de un enlace* ecuaciones (5.40), (5.34) y (5.38) aplicadas al caso particular de $y_{pt, \rho\sigma} = 0$ para $p = r$, $q = s$ que se repiten aquí por comodidad

$$Z'_{ik} = Z_{ik} - \frac{Z_{il} Z_{lk}}{Z_{ll}} \quad i, k = 1, 2, \dots, N \quad (6.37)$$

$$Z_{il} = Z_{ri} - Z_{si} \quad (6.38)$$

$$Z_{ll} = Z_{rl} - Z_{sl} + \frac{1}{y_{pr, pr}} \quad (6.39)$$

Reemplazando (6.38) en (6.39) y teniendo en cuenta que $\frac{1}{y_{pr, pr}} = x$ se obtiene

$$Z_{ll} = (Z_{rr} - Z_{sr}) - (Z_{rs} - Z_{ss}) + x \quad (6.40)$$

De (6.29) y (6.26) se sigue que

$$Z_{ir} - Z_{is} = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, i} x \quad (6.41)$$

$$Z_{kr} - Z_{ks} = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, k} x \quad (6.42)$$

Comparando (6.41) con (6.38) y (6.42) con (6.39) se obtiene:

$$Z_{li} = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, i} x \quad (6.43)$$

$$Z_{kl} = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, k} x \quad (6.44)$$

De (6.31) y (6.27) se obtiene

$$Z_{rr} - Z_{rs} = Z_{qq} - Z_{rs} = (1 + \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q}) x \quad (6.45)$$

De (6.36) se obtiene

$$Z_{rs} - Z_{ss} = [y_{pq, pq} (Z_{qs} - Z_{rs}) + \vec{y}_1^T Z_{\alpha, s}] x \quad (6.46)$$

Reemplazando (6.45) y (6.46) en (6.40) se obtiene

$$Z_{ll} = \vec{y}_1^T (Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s}) - y_{pq, pq} (Z_{qs} - Z_{rs}) x \quad (6.47)$$

Reemplazando (6.29) y (6.31) en (6.47)

$$Z_{ll} = \vec{y}_1^T (Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s}) - y_{pq, pq} [Z_{qr} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q} x - \{Z_{qq} - (1 + \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q}) x\}] x$$

Es decir,

$$Z_{ll} = \vec{y}_1^T (Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s}) - y_{pq, pq} x^2 \quad (6.48)$$

Se puede demostrar (Ver Apéndice A) que

$$Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s} = \vec{C}_\alpha x \quad (6.49)$$

donde $\vec{C}_\alpha$ viene dada por (6.4)

Reemplazando (6.49) en (6.48) se obtiene

$$Z_{ll} = \vec{C}_\alpha x - y_{pq, pq} x^2 \quad (6.50)$$

Reemplazando (6.41), (6.42) y (6.50) en (6.37), simplificando y teniendo en cuenta (6.3) se obtiene (6.6)

Para obtener los elementos de la matriz impedancia de nodos que corresponden a la barra r , es decir, la introducida por la desconexión del elemento $p - q$ se aplica (6.37) al caso particular $j = r$. Es decir,

$$Z'_{ir} = Z_{ir} - \frac{Z_{il} Z_{lr}}{Z_{ll}} = Z_{ir} - \frac{(Z_{ir} - Z_{is})(Z_{rr} - Z_{rs})}{Z_{ll}} \quad (6.51)$$

donde se ha reemplazado (6.38) y (6.39) con $j = r$.

Reemplazando (6.41), (6.31) teniendo en cuenta (6.27) y (6.50) en (6.51) y simplificando se obtiene (6.7).

Cuando $i = j = r$ (6.37) toma la forma

$$Z_{rr} = Z_{qq} - \frac{(Z_{rr} - Z_{rs})^2}{Z_{ll}} \quad (6.52)$$

Reemplazando (6.31) y (6.50) en (6.52) y simplificando se obtiene (6.8).

Apéndice E

DEMOSTRACIÓN DE (6.49)

Es decir,

$$Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s} = \vec{C}_{\alpha} x \quad (\text{E.1})$$

E.1 DESARROLLO

De (6.2) puede verse que

$$Z_{\alpha, q} - Z_{\alpha, s} = \begin{bmatrix} Z_{pq} - Z_{qq} \\ Z_{\rho_1 q} - Z_{\sigma_1 q} \\ Z_{\rho_2 q} - Z_{\sigma_2 q} \\ \vdots \\ Z_{\rho_k q} - Z_{\sigma_k q} \\ \vdots \\ Z_{\rho_M q} - Z_{\sigma_M q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{ps} - Z_{qs} \\ Z_{\rho_1 s} - Z_{\sigma_1 s} \\ Z_{\rho_2 s} - Z_{\sigma_2 s} \\ \vdots \\ Z_{\rho_k s} - Z_{\sigma_k s} \\ \vdots \\ Z_{\rho_M s} - Z_{\sigma_M s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

El elemento general de (E.2), después de reagrupar términos queda

$$(Z_{\rho_k q} - Z_{\rho_k s}) - (Z_{\sigma_k q} - Z_{\sigma_k s}) \quad (\text{E.3})$$

Reemplazando (6.26) en (6.29) y la resultante en (E.3) con $j = \rho_k$ y con $j = \sigma_k$ se obtiene

$$(Z_{\rho_k q} - Z_{\rho_k s}) - (Z_{\sigma_k q} - Z_{\sigma_k s}) = \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \rho_k} x - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \sigma_k} x \quad (\text{E.4})$$

Reemplazando (E.4) en (E.2) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} (\vec{y}_1^T Z_{\alpha, p} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, q}) x \\ (\vec{y}_1^T Z_{\alpha, \rho_1} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \sigma_1}) x \\ (\vec{y}_1^T Z_{\alpha, \rho_2} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \sigma_2}) x \\ \vdots \\ (\vec{y}_1^T Z_{\alpha, \rho_k} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \sigma_k}) x \\ \vdots \\ (\vec{y}_1^T Z_{\alpha, \rho_M} - \vec{y}_1^T Z_{\alpha, \sigma_M}) x \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Reemplazando (6.3) primero y (6.4) después en (E.5) se obtiene (6.49).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] EL-ABIAD, A. H. y GLENN W. Stagg, “**Computer Methods en Power System Analysis**”, McGraw-Hill Inc., New York, 1968.
- [2] DY LIACCO, T. E. y KAVURU A. R., “**Short Circuit Calculations For Multiline Switching And End Faults**”, IEEE Transactions On Power Apparatus And Systems, Vol-PAS 89 # 6, July/August, 1970.
- [3] TARSI, David C., “**Simultaneous Solution Of Line-out and Open-end to ground Short Circuits**”, IEEE Transactions On Power Apparatus And Systems, Vol-PAS 89 # 6, July/August, 1970.